ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА ТОМ I

Л. Д. ЛАНДАУ
Е. М. ЛИФШИЦ

МЕХАНИКА

朗道

理论物理学教程 第一卷

力 学 (第五版)

Л. Д. 朗道 Е. М. 栗弗席兹 著 李俊峰 译

高等教育出版社

第四版编者序

从这本书开始,科学出版社将重新出版 Л.Д.朗道和 Е.М.栗弗席兹的《理论物理学》系列教程.这是首次在栗弗席兹去世后出版.准备出版已故作者的著作是令人伤感的,这个沉重的任务落到了我身上.

这次出版的《力学》修正了第三版出版后发现的印刷错误,也在文字上做了少量的改进.这些修改是栗弗席兹和我共同完成的,其中有一部分已经反映在最近的英文版中.

Л.П.皮塔耶夫斯基

1987年5月

第三版序

该书的第二版与第一版几乎没有差别. 在准备这一版时也没有发现任何值得修改之处,所以该书基本上是翻印(只是改正了印刷错误). 我和 Л.П. 皮塔耶夫斯基只是对最后一章的绝热不变量进行了修改和补充.

E.M. 栗弗席兹

1972 年 6 月

第一版序

从这本书开始，我们将陆续再版《理论物理学》教程，计划包括以下各卷：

1. 力学，
2. 场论，
3. 量子力学(非相对论理论)，
4. 相对论量子理论，
5. 统计物理学，
6. 流体力学，
7. 弹性理论，
8. 连续介质电动力学，
9. 物理动理学.

第一卷的第一版曾于1940年由Л.朗道和Л.皮亚季戈尔斯基发表.虽然这套教程内容没有改变，但是经过了重大修改并完全重写.

感谢И.Е.贾洛申斯基和Л.П.皮塔耶夫斯基在阅读校样时给予的帮助.

Л.Д.朗道，Е.М.栗弗席兹

莫斯科，1957年7月

目 录

第一章

运动方程

§1　广义坐标

质点是力学的基本概念之一，是指那些忽略尺寸而不会影响其运动描述的物体. 当然，可否忽略尺寸因不同问题的具体条件而异. 例如，研究行星绕太阳的运动时，可以认为行星是质点，但是在研究行星自转时就不能当作质点.

质点在空间的位置由其径矢 $\boldsymbol{r}$ 确定，其分量用笛卡儿坐标 x,y,z 表示. 径矢 $\boldsymbol{r}$ 对时间的导数

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

称为质点的*速度*，其二阶导数 $\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t^2$ 称为质点的*加速度*. 今后，对时间的导数经常用符号上面的点表示，如 $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}$.

为了确定由 N 个质点组成的系统在空间的位置，需要给定 N 个径矢，即给定 $3N$ 个坐标.

通常，唯一地确定系统位置所需独立变量的数目称为系统的*自由度*[①]，N 个质点组成系统的自由度为 $3N$. 这些独立变量不一定是质点的笛卡儿坐标，根据问题的条件，有时选取其它坐标更加方便.

任意 s 个可以完全刻画系统（s 个自由度）位置的变量 $q_1,q_2,\cdots,q_s$ 称为该系统的*广义坐标*，其导数 $\dot{q}_i$ 则称为*广义速度*.

---

① 这里讨论的是完整系统，非完整系统的自由度不能这样定义，参见：马尔契夫著. 理论力学（第 3 版）. 李俊峰译. 北京：高等教育出版社，2005:21.

——译者注

然而,给定广义坐标的数值并不能确定系统在给定时刻的“力学状态”,因为还不足以预测下一时刻系统的位置.对于给定的广义坐标值,系统可以具有任意的速度,因此下一时刻(即经过无穷小的时间间隔 dt)系统的位置可能不同.

实验表明,同时给定系统的所有广义坐标和速度就可以确定系统的状态,并且原则上也可以预测以后的运动.从数学观点看,在某时刻给定所有广义坐标 q 和速度 $\dot{q}$ 就唯一地确定了该时刻的加速度 $\ddot{q}$①.

加速度与坐标、速度的关系式称为*运动方程*.对于函数 $q(t)$ 来说,这个关系式是二阶微分方程,原则上,将其积分可以求出函数 $q(t)$,即确定系统的运动轨迹.

§2 最小作用量原理

力学系统运动规律的最一般表述由*最小作用量原理*(或者*哈密顿原理*)给出.根据这个原理,描述每一个力学系统都可以用一个相应的函数

$$L(q_1,q_2,\cdots,q_s,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_s,t),$$

或者简记为 $L(q,\dot{q},t)$,并且系统的运动还要满足下面的条件.

假设在时刻 $t=t_1$ 和 $t=t_2$ 系统的位置由两个坐标 $q^{(1)}$ 和 $q^{(2)}$ 确定.那么,系统在这两个位置之间的运动使得积分

$$S=\int_{t_1}^{t_2}L(q,\dot{q},t)\mathrm{d}t \tag{2.1}$$

取最小值②.函数 L 称为给定系统的*拉格朗日函数*,积分(2.1)称为*作用量*.

拉格朗日函数中只包含 q 和 $\dot{q}$,而不包含更高阶导数 $\ddot{q},\dddot{q},\cdots$,这反映了前面提到的物理事实,即力学状态完全由坐标和速度确定.

下面我们通过求积分(2.1)的最小值来推导运动微分方程.为了书写简便,我们先假设系统有一个自由度,只需一个函数 $q(t)$ 来确定.

设 $q=q(t)$ 是使 S 取最小值的函数,就是说用任意函数

$$q(t)+\delta q(t) \tag{2.2}$$

代替 $q(t)$ 都会使 S 增大,其中函数 $\delta q(t)$(也称为函数 $q(t)$ 的*变分*)在从 t_1 到 t_2 的整个时间间隔内都是小量.由于比较函数(2.2)在时刻 $t=t_1$ 和 $t=t_2$ 也应该分别取值为 $q^{(1)}$ 和 $q^{(2)}$,于是有:

$$\delta q(t_1)=\delta q(t_2)=0. \tag{2.3}$$

---

① 为了书写简便,我们用 q 表示所有广义坐标 $q_1,q_2,\cdots,q_s$,用 $\dot{q}$ 表示所有广义速度.

② 然而,应该指出的是,这个最小作用量原理的表述并不是对系统的整个运动轨迹成立,而是在足够小的区段上成立.对于整个轨迹来说,积分(2.1)只能取驻值而不一定是最小值.当然,这对于推导运动方程没有什么影响,因为我们只需用到驻值条件.

用 $q(t)+\delta q(t)$代替 $q(t)$使 S 产生的增量为

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q+\delta q,\dot{q}+\delta\dot{q},t)\mathrm{d}t-\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)\mathrm{d}t.$$

这个差按 δq 和 $\delta\dot{q}$的指数展开式(在积分号下的表达式中)是从一阶项开始的. S 取最小值[①]的必要条件是这些项之和等于零.这个和称为积分的一阶变分(或者简称为变分).于是,最小作用量原理可以写成

$$\delta S=\delta\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)\mathrm{d}t=0, \tag{2.4}$$

或者变分后的形式:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\right)\mathrm{d}t=0.$$

注意到 $\delta\dot{q}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q$,将第二项分部积分得:

$$\delta S=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\bigg|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q\mathrm{d}t=0. \tag{2.5}$$

根据(2.3)上式中第一项等于零. 剩下的积分在 δq 任意取值时都应该等于零. 这只有在被积函数恒等于零的情况下才有可能.于是我们得到方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}=0.$$

对于有 s 个自由度的系统,在最小作用量原理中有 s 个不同的函数 $q_i(t)$应该独立地变分.显然我们可以得到 s 个方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \quad (i=1,2,\cdots,s). \tag{2.6}$$

这就是我们要推导的运动微分方程,在力学中称为*拉格朗日方程*[②].如果给定力学系统的拉格朗日函数已知,则方程(2.6)建立了加速度、速度和坐标之间的联系,是系统的运动方程.

从数学的观点看,方程(2.6)包括 s 个未知函数 $q_i(t)$的 s 个二阶微分方程. 这个方程组的通解包含 $2s$ 个任意常数.为了确定这些常数,从而完全确定力学系统的运动,必须知道描述系统在某给定时刻状态的初始条件,例如坐标和速度的初值.

设力学系统由 A 和 B 两部分组成,每个部分都是封闭的,拉格朗日函数分别是 L_A 和 L_B.在两个部分相距足够远以至它们的相互作用可以忽略的极限情况下,系统的拉格朗日函数趋向于极限:

---

① 一般来说是驻值.

② 在求积分(2.1)驻值的变分计算中,这些方程称为欧拉方程.

$$\lim L = L_A + L_B. \tag{2.7}$$

拉格朗日函数的这种可加性反映了一个事实：每一个独立部分的运动方程不可能包含另一个部分的物理量.

显然，将力学系统的拉格朗日函数乘以一个任意常数，不会改变运动微分方程. 这似乎导致一种不确定性：各个孤立力学系统的拉格朗日函数可以乘以不同的任意常数. 可加性消除了这个不确定性，只允许所有力学系统都乘以同一个任意常数，而这归结为选择这个物理量度量单位的任意性，我们还将在 § 4 中继续讨论这个问题.

我们还需要进行以下的一般性讨论. 考虑两个拉格朗日函数 $L'(q,\dot{q},t)$ 和 $L(q,\dot{q},t)$，它们相差某个坐标和时间的函数 $f(q,t)$ 对时间的全导数：

$$L'(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(q,t). \tag{2.8}$$

计算这两个拉格朗日函数对应的积分(2.1)可得关系式：

$$\begin{aligned} S' &= \int_{t_1}^{t_2} L'(q,\dot{q},t)\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(q,t)\mathrm{d}t \\ &= S + f(q^{(2)},t_2) - f(q^{(1)},t_1), \end{aligned}$$

即 S 和 S' 相差一个附加项. 该附加项在变分时将消失，$\delta S' = 0$ 和 $\delta S = 0$ 完全相同，因而运动微分方程也相同.

可见，拉格朗日函数可以附加任意一个关于时间和坐标的函数的全导数.

§ 3　伽利略相对性原理

为了研究力学现象必须选择参考系. 一般来说运动规律在不同的参考系下具有不同的形式. 假如任意选择参考系，则可能使非常简单的现象看起来十分复杂. 这自然会产生一个问题，即如何选择参考系使得力学规律最简单.

相对于任意参考系，空间是非均匀的各向异性的. 这就是说，如果某个物体与其它物体之间没有相互作用，但是它在空间中的不同位置和不同指向在力学意义上是不等价的. 同样，一般情况下时间也是非均匀的，即不同时刻也是不等价的. 显然，时间和空间的这些性质使力学现象的描述变得复杂. 例如，自由物体(即不受任何外力作用)不可能静止：如果在某个时刻其速度等于零，但在下一个时刻它开始向某个方向运动.

然而，似乎总是存在某种参考系，空间相对它是均匀的各向同性的，时间相对它是均匀的. 这样的参考系称为*惯性参考系*. 在惯性参考系中，在某个时刻静止的自由物体将永远保持静止.

对于在惯性参考系中自由运动的质点，我们立即可以得到其拉格朗日函数形式的一些结论. 时间和空间的均匀性意味着这个函数不显含质点的径矢 $\boldsymbol{r}$ 和

时间 t,即 L 只是速度$\boldsymbol{v}$ 的函数.由于空间各向同性,拉格朗日函数不依赖于矢量$\boldsymbol{v}$ 的方向,只能是速度大小的函数,也就是说 L 是$\boldsymbol{v}^2=v^2$ 的函数:

$$L=L(v^2). \tag{3.1}$$

由拉格朗日函数不显含质点的径矢 $\boldsymbol{r}$ 可知$\partial L/\partial \boldsymbol{r}=0$,拉格朗日方程可写成①

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}=0,$$

由此可得$\partial L/\partial \boldsymbol{v}=\text{const}$.而$\partial L/\partial \boldsymbol{v}$ 只是速度的函数,故

$$\boldsymbol{v}=\text{const}. \tag{3.2}$$

可见,在惯性参考系中任何自由运动的速度的大小和方向都不改变.这个结论包含了惯性定律的内容.

如果在我们已有的这个惯性参考系以外,再引进另一个惯性参考系,它相对第一个惯性参考系作匀速直线运动,则相对这两个参考系的自由运动规律完全相同:自由运动仍是匀速直线运动.

实验证明,不仅自由运动规律相对这两个参考系完全相同,所有力学关系式相对这两个参考系都是等价的.因此存在不只是一个,而是无穷多个惯性参考系,它们相互作匀速直线运动.在这些参考系中时间和空间都是相同的,力学规律也是相同的.这个结论称为*伽利略相对性原理*,这是力学中最重要的原理之一.

上面论述充分说明了惯性参考系的特性,应该利用这样的参考系研究力学现象.今后如果不特别声明,我们只研究惯性参考系.

无穷多个这样的参考系的等价性还表明,不存在比其它参考系更好的一个“绝对”惯性参考系.

设有两个不同的参考系 K 和 K′,其中 K′相对 K 以速度 $\boldsymbol{V}$ 运动,同一个质点相对这两个参考系的坐标 $\boldsymbol{r}$ 和$\boldsymbol{r}'$满足关系式

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{V}t. \tag{3.3}$$

我们认为这两个参考系中的时间是相同的:

$$t=t'. \tag{3.4}$$

绝对时间假设是经典力学的基础②.

公式(3.3)和(3.4)称为*伽利略变换*.伽利略相对性原理可以表述为:力学运动方程在伽利略变换下具有不变性.

§4 自由质点的拉格朗日函数

下面研究拉格朗日函数的形式,首先研究一个最简单的例子——质点相对

① 标量对矢量的偏导数也是矢量,其分量分别等于该标量分别对矢量各个分量的偏导数.

② 这个假设在相对论力学中不成立.

惯性参考系的自由运动.我们已经知道,这种情况下拉格朗日函数只能依赖于速度的平方.我们利用伽利略原理来研究这个依赖关系的形式.如果惯性参考系 K 以无穷小速度 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 相对惯性参考系 K′运动,则有 $\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\varepsilon}$.拉格朗日函数 $L(v^2)$ 经过伽利略变换后得到 L',由于在所有惯性参考系中运动方程的形式都相同,故 L' 与 $L(v^2)$ 只能相差某个关于时间和坐标的函数的全导数(参见§2).

于是有

$$L'=L(v'^2)=L(v^2+2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}+\varepsilon^2).$$

将这个表达式展开成 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的幂级数并忽略高阶小量得:

$$L(v'^2)=L(v^2)+2\frac{\partial L}{\partial v^2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}.$$

只有当该等式右边第二项与速度 $\boldsymbol{v}$ 呈线性依赖关系时,它才能是时间的全导数.因此 $\frac{\partial L}{\partial v^2}$ 不依赖于速度,即拉格朗日函数与速度平方成正比:

$$L=\frac{m}{2}v^2, \tag{4.1}$$

其中 m 为常数.

由拉格朗日函数在速度无穷小变换下满足伽利略相对性原理可知,在参考系 K 以有限速度 $\mathbf{V}$ 相对 K′运动情况下,拉格朗日函数也满足该原理.事实上,

$$L'=\frac{m}{2}v'^2=\frac{m}{2}(\boldsymbol{v}+\mathbf{V})^2=\frac{m}{2}v^2+2\frac{m}{2}\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{V}+\frac{m}{2}V^2$$

或者

$$L'=L+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(2\frac{m}{2}\boldsymbol{r}\cdot\mathbf{V}+\frac{m}{2}V^2t\right).$$

第二项是全导数,可以略去.

物理量 m 称为质点的质量.根据拉格朗日函数的可加性,对于无相互作用的质点组成的自由质点系,有①

$$L=\sum_a\frac{m_av_a^2}{2}. \tag{4.2}$$

必须强调,只有考虑到可加性的时候,给出的质量定义才有实际物理意义.在§2曾经指出,总是可以将拉格朗日函数乘以常数而不改变方程.对于函数(4.2),乘以常数就相当于改变了质量的度量,不同质点的质量之间的比例关系却是具有实际物理意义的,不会发生改变.

容易看出,质量不可能是负的.事实上,根据最小作用量原理,质点从空间点 1 到空间点 2 的真实运动,使得积分

① 我们用拉丁字母表中前几个字母表示质点的编号,用 i,k,l 给坐标编号.

$$S=\int_1^2\frac{mv^2}{2}\mathrm{d}t$$

取最小值.假如质量是负的,对于快速离开点 1 再快速接近点 2 的轨迹,作用量可以取绝对值任意大的负值,不可能有最小值①.

注意到

$$v^2=\left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^2=\frac{\mathrm{d}l^2}{\mathrm{d}t^2}.\tag{4.3}$$

因此为了得到拉格朗日函数只需求出在特定坐标系中弧长微元 $\mathrm{d}l$ 的平方.

例如,在笛卡儿坐标系中 $\mathrm{d}l^2=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2$,进而有

$$L=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2),\tag{4.4}$$

在柱坐标系中 $\mathrm{d}l^2=\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\varphi^2+\mathrm{d}z^2$,进而有

$$L=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2),\tag{4.5}$$

在球坐标系中 $\mathrm{d}l^2=\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\theta^2+r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2$,进而有

$$L=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2).\tag{4.6}$$

§5 质点系的拉格朗日函数

下面研究一种质点系,其质点之间有相互作用,但不受外部任何物体作用,称为封闭质点系.为了描述质点之间的相互作用,可以在自由质点系的拉格朗日函数中增加坐标的函数(根据相互作用的性质确定).②将这个函数记为 U,则有

$$L=\sum_a\frac{m_av_a^2}{2}-U(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots)\tag{5.1}$$

($\boldsymbol{r}_a$ 是第 a 个质点的径矢).这是封闭质点系拉格朗日函数的一般形式.

函数 U 称为质点系的势能,而

$$T=\sum_a\frac{m_av_a^2}{2}$$

称为质点系的动能,这些名称的含义将在§6 中介绍.

势能仅依赖于所有质点在相同时刻的分布,这意味着其中一个质点位置的改变立刻影响到所有其它质点,可以说相互作用瞬间"扩散".这个相互作用的性质在经典力学中是必然的,它紧密联系着经典力学的基本前提,即绝对时间假设和伽利略相对性原理.如果相互作用不是瞬间扩散的,即以一定的速度扩散,而

① 在第 2 页的注释中给出的说明不会影响这个结论,因为 $m<0$ 时积分在轨迹上任意小区间都不可能有最小值.

② 这个结论限于本书所述的经典(非相对论)力学范畴.

时间的绝对性意味着通常的速度相加法则适用于所有现象，因此在不同的（相对运动）参考系中扩散速度不相同．于是相互作用的物体的运动规律在不同惯性参考系中也不相同，这就违背了伽利略相对性原理．

在§3中我们只提到了时间的均匀性．拉格朗日函数的形式(5.1)表明，时间不仅是均匀的，而且是各向同性的，即时间的性质在两个方向上都是相同的．事实上，用 $-t$ 代替 t 不会改变拉格朗日函数，进而也不会改变运动方程．换句话说，如果在参考系中某种运动是可能的，则反运动也是可能的，即可以按照相反的顺序进行运动．在这个意义下，按照经典力学定律所有运动都是可逆的．

知道拉格朗日函数后就可以建立运动方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a}=\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a}. \tag{5.2}$$

将(5.1)代入后得：

$$m_a\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}_a}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_a}. \tag{5.3}$$

这种形式的运动方程称为*牛顿方程*，是自由质点系力学的基础．方程(5.3)右端的矢量

$$\boldsymbol{F}_a=-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_a} \tag{5.4}$$

称为作用在第 a 个质点上的*力*．它与 U 一样，依赖于所有质点的坐标，但不依赖于速度．因此，方程(5.3)表明，质点的加速度矢量也是坐标的函数．

势能可以增减任意常数而不改变运动方程（这是在§2中讲到的拉格朗日函数不确定性的特殊情况）．选择这个任意常数的最自然和最通用的方法是，当无限增大质点间距离时势能趋向于零．

如果描述运动不是用笛卡儿坐标，而是用任意的广义坐标 q_i，则为了得到拉格朗日函数必须引进相应的变换：

$$x_a=f_a(q_1,q_2,\cdots,q_s),\ \dot{x}_a=\sum_k\frac{\partial f_a}{\partial q_k}\dot{q}_k,\quad \text{etc.}$$

将这些表达式代入函数

$$L=\frac{1}{2}\sum_a m_a(\dot{x}_a^2+\dot{y}_a^2+\dot{z}_a^2)-U,$$

可得如下形式的拉格朗日函数：

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i,k}a_{ik}(q)\dot{q}_i\dot{q}_k-U(q), \tag{5.5}$$

其中 a_{ik} 是广义坐标的函数．用广义坐标写出的动能是速度的二次函数，但可以依赖于广义坐标．

到此为止我们只研究了封闭质点系．下面研究非封闭质点系 A，它与运动

完全已知的质点系 B 相互作用.这种情况下称 A 在(由 B)给定的外场中运动.根据最小作用量原理推导运动方程是要对每个广义坐标进行独立变分(即认为其它广义坐标是已知的),因此,可将质点系 $A+B$ 的拉格朗日函数 L 中广义坐标 q_B 用已知函数代替,由此得到质点系 A 的拉格朗日函数 L_A.

假设质点系 $A+B$ 是封闭的,则有

$$L = T_A(q_A, \dot{q}_A) + T_B(q_B, \dot{q}_B) - U(q_A, q_B),$$

其中前两项分别是 A 和 B 的动能,第三项是 $A+B$ 的势能.将广义坐标 q_B 用已知的时间函数代替后,$T_B(q_B, \dot{q}_B)$ 是只依赖于时间的函数(因此也是某个时间函数的全导数),可以从 L 中略去.于是

$$L = T_A(q_A, \dot{q}_A) - U(q_A, q_B(t)).$$

可见,在外场中运动的质点系的拉格朗日函数具有通常的形式,差别就在于势能可能显含时间.

对于在外场中运动的质点,拉格朗日函数写成

$$L = \frac{mv^2}{2} - U(\boldsymbol{r}, t), \tag{5.6}$$

而运动方程写成

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}. \tag{5.7}$$

如果质点处在外场中时,所有点都受到相同的力 $\boldsymbol{F}$,则称这样的外场是均匀的.显然在均匀外场中势能可以写成

$$U = -\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}. \tag{5.8}$$

在结束本节之前,我们还需对拉格朗日方程在具体问题中如何应用做些说明.我们经常会遇到一种力学系统,其中的物体(质点)之间的相互作用有约束的性质,即限制物体相互间的位置关系.

实际上这种约束是通过杆、线、铰等实现的.这给研究运动带来新问题,即运动伴有接触处的摩擦.一般来说,这个问题超越了力学范围(参见§25).

然而,很多情况下摩擦是比较弱的,它对运动的影响可以忽略.如果还可以忽略“连接物”的质量,则其作用仅仅是减少自由度(与 $3N$ 相比).这样又可以利用拉格朗日函数(5.5)来确定运动,独立的广义坐标数就等于自由度.

习　　题

试求下面在均匀重力场(重力加速度为 g)中各系统的拉格朗日函数.

习题 1　平面双摆(图 1).

解:取绳 l_1 和 l_2 分别与竖直方向的夹角 φ_1 和 φ_2 为广义坐标.对质点 m_1 有

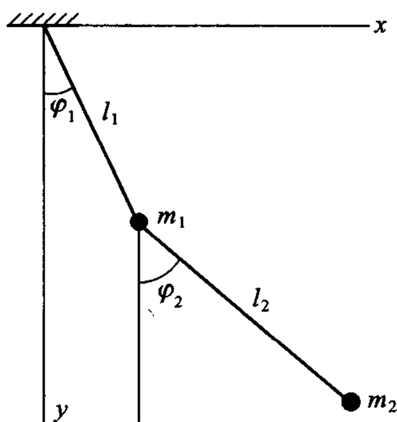


图 1

$$T_1=\frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\varphi}_1^2,\qquad U=-m_1gl_1\cos\varphi_1.$$

为了求出第二个质点的动能，我们用角 φ_1 和 φ_2 表示第二个质点的笛卡儿坐标 x_2，y_2(坐标原点取在悬挂点，y 轴竖直向下)：

$$x_2=l_1\sin\varphi_1+l_2\sin\varphi_2,\qquad y_2=l_1\cos\varphi_1+l_2\cos\varphi_2.$$

于是有

$$T_2=\frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2)=\frac{m_2}{2}[l_1^2\dot{\varphi}_1^2+l_2^2\dot{\varphi}_2^2+2l_1l_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2].$$

最后得

$$L=\frac{m_1+m_2}{2}l_1^2\dot{\varphi}_1^2+\frac{m_2}{2}l_2^2\dot{\varphi}_2^2+m_2l_1l_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2+$$
$$(m_1+m_2)gl_1\cos\varphi_1+m_2gl_2\cos\varphi_2.$$

习题 2 质量为 m_2 的平面摆，其悬挂点(质量为 m_1)可以沿着水平直线运动(图 2).

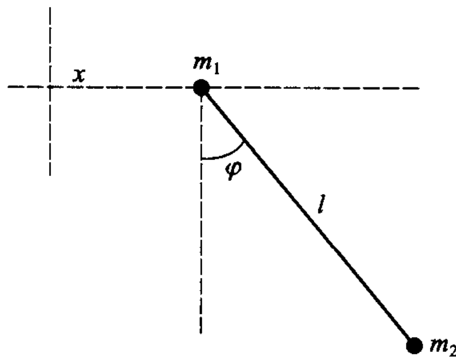


图 2

解：设质点 m_1 的坐标为 x，绳与竖直方向夹角为 φ，则有

$$L=\frac{m_1+m_2}{2}\dot{x}^2+\frac{m_2}{2}(l^2\dot{\varphi}^2+2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi)+m_2gl\cos\varphi.$$

习题 3 设有一平面摆，其悬挂点：

a. 沿着竖直圆以定常圆频率 γ 运动(图 3)，

b. 按规律 $a\cos\gamma t$ 水平振动，

c. 按规律 $a\cos\gamma t$ 竖直振动.

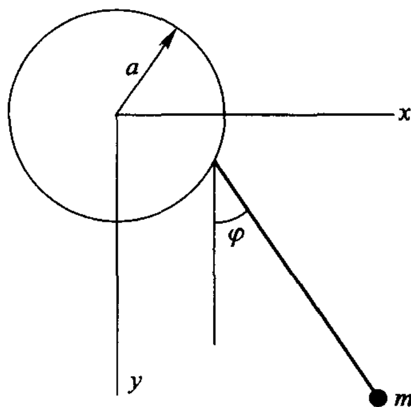


图 3

解：

a. 质点 m 的坐标为：

$$x=a\cos\gamma t+l\sin\varphi,\qquad y=-a\sin\gamma t+l\cos\varphi.$$

拉格朗日函数为

$$L=\frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2+mla\gamma^2\sin(\varphi-\gamma t)+mgl\cos\varphi.$$

这里略去了仅仅依赖于时间的项，它可以写成 $mla\gamma\cos(\varphi-\gamma t)$ 对时间的全导数.

b. 质点 m 的坐标为：

$$x=a\cos\gamma t+l\sin\varphi,\qquad y=l\cos\varphi.$$

拉格朗日函数(略去全导数后)为

$$L=\frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2+mla\gamma^2\cos\gamma t\sin\varphi+mgl\cos\varphi.$$

c. 类似地，可得：

$$L=\frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2+mla\gamma^2\cos\gamma t\cos\varphi+mgl\cos\varphi.$$

习题 4 在图 4 所示的力学系统中，质点 m_2 沿着竖直轴运动，整个系统以常角速度 Ω 绕该轴转动.

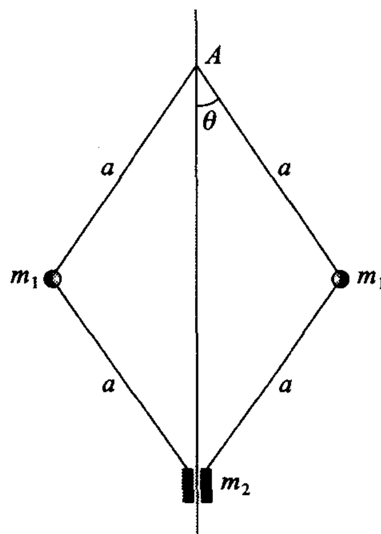


图 4

解：设线段 a 与竖直方向夹角为 θ，系统绕竖直轴转动的角度为 φ，则 $\dot{\varphi}=\Omega$. 对于每个质点 m_1 的微小位移有

$$dl_1^2=a^2d\theta^2+a^2\sin^2\theta d\varphi^2.$$

质点 m_2 到 A 点的距离为 $2a\cos\theta$，因此

$$dl_2=-2a\sin\theta d\theta.$$

拉格朗日函数为

$$L=m_1a^2(\dot{\theta}^2+\Omega^2\sin^2\theta)+2m_2a^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2+2ga(m_1+m_2)\cos\theta.$$

第二章

守恒定律

§6 能量

在力学系统运动过程中,描述其状态的 $2s$ 个变量 $q_i, \dot{q}_i \quad (i=1,2,\cdots,s)$随时间变化.但是存在这些变量的某些函数,在运动过程中保持常值,只依赖于初始条件.这些函数称为*运动积分*.

对于具有 s 个自由度的力学封闭系统,独立运动积分数等于 $s-1$.这很容易理解.运动方程的通解包含 $2s$ 个任意常数(参见第 3 页).由于封闭系统的运动方程不显含时间,所以可以完全任意选择初始时刻,总可以将方程解中的任意常数之一选作时间的可加常数 t_0.从 $2s$ 个函数

$$q_i = q_i(t+t_0, C_1, C_2, \cdots, C_{2s-1}),$$

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(t+t_0, C_1, C_2, \cdots, C_{2s-1}),$$

中消去 $t+t_0$,将 $2s-1$ 个任意常数 $C_1, C_2, \cdots, C_{2s-1}$表示成 $q_i, \dot{q}_i$ 的函数形式,这些函数就是运动积分.

然而,并不是所有的运动积分在力学中有相同的重要性.其中一些运动积分的恒定不变性源自时间和空间的基本性质,即均匀性和各向同性.这些所谓的守恒量具有可加性,对于几个相互独立部分组成的系统,守恒量的值等于各个部分相应值之和.

可加性使相应的物理量具有重要的力学意义.例如,假设两个物体在某时间间隔内相互作用.由于作用发生前后整个系统的每个可加运动积分值就等于两部分相应值之和,如果已知作用发生前物体的运动状态,则利用守恒定律就可能得到作用后物体运动状态的有关结论.

我们首先介绍时间均匀性导出的守恒定律.

由于时间具有均匀性,封闭系统的拉格朗日函数不显含时间.因此拉格朗日函数对时间的全导数可以写成

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\sum_i\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i+\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i$$

(如果 L 显含时间,右端还应该有$\partial L/\partial t$).利用拉格朗日方程将$\partial L/\partial q_i$ 替换为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$,得

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\sum_i\dot{q}_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}+\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i=\sum_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-L\right)=0.$$

由此可知

$$E=\sum_i\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-L \tag{6.1}$$

在封闭系统运动中保持不变,是运动积分,称为系统的能量.根据(6.1),能量与拉格朗日函数的关系是线性的,由拉格朗日函数的可加性可以直接得出能量的可加性.

在上述推导中仅仅利用了拉格朗日函数不显含时间的性质,所以能量守恒定律不仅对于封闭系统成立,对位于定常外场(即不显含时间)中的系统也成立.能量守恒的力学系统也称为保守系统.

在§5我们已经知道,封闭(或者位于定常外场中的)系统的拉格朗日函数可写成

$$L=T(q,\dot{q})-U(q),$$

其中 T 是速度的二次函数.利用著名的欧拉齐次函数定理可得

$$\sum_i\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\sum_i\dot{q}_i\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=2T.$$

将此式代入(6.1)得

$$E=T(q,\dot{q})+U(q), \tag{6.2}$$

用笛卡儿坐标写成

$$E=\sum_a\frac{m_a v_a^2}{2}+U(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots). \tag{6.3}$$

可见,能量包含本质不同的两项:依赖于速度的动能和仅仅依赖于坐标的势能.

§7 动量

另一个守恒定律与空间的均匀性相关.

根据空间均匀性,封闭力学系统在空间中整体平移时,其性质保持不变.因此我们研究一个无穷小平移 $\boldsymbol{\varepsilon}$,并要求拉格朗日函数保持不变.

平移就是将系统中所有质点移动相同的位移 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的变换,即径矢 $\boldsymbol{r}_a \to \boldsymbol{r}_a + \boldsymbol{\varepsilon}$.在速度不变的情况下,无穷小的坐标变换使拉格朗日函数产生的改变量为

$$\delta L = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a} \cdot \delta \boldsymbol{r}_a = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \sum_a \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a},$$

其中求和是对所有质点进行的.对任意 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 要求 $\delta L = 0$ 等价于

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a} = 0. \tag{7.1}$$

根据拉格朗日方程(5.2)得

$$\sum_a \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a} = 0.$$

于是我们可得结论:封闭力学系统的矢量

$$\boldsymbol{P} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a} \tag{7.2}$$

在运动中保持不变.矢量 $\boldsymbol{P}$ 称为系统的*动量*.对拉格朗日函数(5.1)求导可得用质点速度表示的动量:

$$\boldsymbol{P} = \sum_a m_a \boldsymbol{v}_a. \tag{7.3}$$

动量的可加性是显然的.与能量不同之处在于,无论质点之间的相互作用是否可以忽略,动量都等于各个质点的动量

$$\boldsymbol{p}_a = m_a \boldsymbol{v}_a$$

之和.

只有在没有外场的情况下,动量矢量的三个分量的守恒都成立.然而,在有外场的情况下,如果势能不显含某个笛卡儿坐标,则相应的动量分量守恒.显然,沿着该坐标轴平移不会改变力学系统的性质,动量在该轴上投影守恒.例如,在方向沿着 z 轴的均匀场中,沿着 x 和 y 轴的动量守恒.

等式(7.1)的物理含义非常简单.$\partial L/\partial \boldsymbol{r}_a = -\partial U/\partial \boldsymbol{r}_a$ 是作用在第 a 个质点上的力 $\boldsymbol{F}_a$.等式(7.1)表明,作用在封闭系统的所有质点上的力之和等于零:

$$\sum_a \boldsymbol{F}_a = 0. \tag{7.4}$$

特别地,当系统只由两个质点组成时,$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = 0$,相互作用在两个质点上的力大小相等、方向相反.这就是著名的*作用与反作用互等定律*.

如果用广义坐标 q_i 描述运动，则拉格朗日函数对广义速度的导数

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{7.5}$$

称为广义动量，而

$$F_i=\frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{7.6}$$

称为广义力.拉格朗日方程可以写成

$$\dot{p}_i=F_i. \tag{7.7}$$

用笛卡儿坐标表示的广义动量就是 $\boldsymbol{p}_a$ 的分量.一般情况下 p_i 是广义速度的线性齐次函数，不能化为质量与速度的积.

习 题

习题 质量为 m 的质点以速度 $\boldsymbol{v}_1$ 从一个势能为常数 U_1 的半空间运动到另一个势能为常数 U_2 的半空间.求质点运动方向的改变.

解：势能不依赖于平行两个半空间分界面的轴的坐标，因此质点动量在该分界面上的投影守恒.用 θ_1,θ_2 表示质点穿越分界面前后速度 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ 与分界面法线的夹角，于是有：$v_1\sin\theta_1=v_2\sin\theta_2$. v_1 和 v_2 之间的关系由能量守恒定律给出，最后可求得

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\sqrt{1+\frac{2}{mv_1^2}(U_1-U_2)}.$$

§8 质心

封闭系统的动量对于不同的惯性参考系有不同的值.如果参考系 K′相对参考系 K 以速度 $\boldsymbol{V}$ 运动，则质点相对这两个参考系的速度 $\boldsymbol{v}_a'$ 和 $\boldsymbol{v}_a$ 满足关系式 $\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_a'+\boldsymbol{V}$.因此在这两个参考系中动量值 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{P}'$ 满足关系式

$$\boldsymbol{P}=\sum_a m_a\boldsymbol{v}_a=\sum_a m_a\boldsymbol{v}_a'+\boldsymbol{V}\sum_a m_a,$$

或者

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}'+\boldsymbol{V}\sum_a m_a. \tag{8.1}$$

特别地，一定存在使得动量等于零的参考系 K′.令(8.1)中 $\boldsymbol{P}'=0$，求得参考系 K′的速度为

$$\boldsymbol{V}=\frac{\boldsymbol{P}}{\sum m_a}=\frac{\sum m_a\boldsymbol{v}_a}{\sum m_a}. \tag{8.2}$$

如果力学系统的动量等于零，则称系统相对该参考系静止.这是单个质点静止概念的自然推广.公式(8.2)给出的速度 $\boldsymbol{V}$，具有动量不为零的力学系统“整

体运动”速度的含义.由此可见,动量守恒定律自然地给出了系统整体静止和速度的概念.

公式(8.2)还表明,动量 $\boldsymbol{P}$ 和系统整体运动速度 $\boldsymbol{V}$ 的关系,就如同一个质点动量和速度的关系,该质点的质量等于系统中所有质点的质量之和 $\mu=\sum m_a$.这正说明了质量的可加性.

公式(8.2)右端可以看作是下面表达式对时间的导数

$$\boldsymbol{R}=\frac{\sum m_a\boldsymbol{r}_a}{\sum m_a}. \tag{8.3}$$

可以说,系统整体运动速度就是径矢为(8.3)的空间点的运动速度,这个点称为系统的质心.

封闭系统动量守恒定律可以表述为:系统的质心作匀速直线运动.这是§3给出的自由质点惯性定律的推广,质点的质心就是质点本身.

在研究封闭系统的力学性质时,当然利用质心静止的惯性参考系,这就可以不必研究系统整体的匀速直线运动.

整体静止的力学系统的能量通常称为内能 E_{vn},它包括系统内质点的相对运动动能和相互作用势能.以速度 $\boldsymbol{V}$ 作整体运动的系统的能量可以写成

$$E=\frac{\mu V^2}{2}+E_{\text{vn}}. \tag{8.4}$$

尽管这个公式非常显然,但我们还是给出以下推导.力学系统相对参考系 K 和 K′的能量 E 和 E' 的关系为

$$\begin{aligned}E&=\frac{1}{2}\sum_a m_a v_a^2+U=\frac{1}{2}\sum_a m_a(\boldsymbol{v}_a'+\boldsymbol{V})^2+U\\&=\frac{\mu V^2}{2}+\boldsymbol{V}\cdot\sum_a m_a\boldsymbol{v}_a'+\frac{1}{2}\sum_a m_a v_a'^2+U\end{aligned}$$

或者

$$E=E'+\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{P}'+\frac{\mu V^2}{2}. \tag{8.5}$$

这个公式给出了相对两个不同惯性参考系的能量关系,类似于公式(8.1)给出的动量关系.如果在参考系 K′中系统质心静止,则 $\boldsymbol{P}'=0, E'=E_{\text{vn}}$,这时就得到公式(8.4).

习 题

习题 求相对两个不同惯性参考系的作用量之间的关系.

解:拉格朗日函数等于动能和势能之差,显然,类似公式(8.5)有

$$L=L'+\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{P}'+\frac{\mu V^2}{2}.$$

将该等式对时间积分可得

$$S=S'+\mu\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{R}'+\frac{\mu V^2}{2}t,$$

其中 $\boldsymbol{R}'$是在参考系 K′中系统的质心的径矢.

§9 动量矩

下面研究由空间各向同性得到的守恒定律.

各向同性意味着封闭系统整体在空间中任意转动时,力学性质保持不变.因此,我们研究系统整体的无穷小转动并要求拉格朗日函数保持不变.

我们引入无穷小转动矢量 $\delta\boldsymbol{\varphi}$,其大小等于转角的绝对值 $\delta\varphi$,方向沿着转动轴(转动方向对于 $\delta\boldsymbol{\varphi}$ 的方向符合右手螺旋法则).

我们首先研究,在系统转动时,从坐标原点(位于转动轴上)指向系统中任意质点的径矢的位移.径矢端点的线位移与转角的关系为(如图 5 所示)

$$|\delta\boldsymbol{r}|=r\sin\theta\cdot\delta\varphi.$$

位移矢量的方向垂直过 $\boldsymbol{r}$ 和 $\delta\boldsymbol{\varphi}$ 的平面.显然有

$$\delta\boldsymbol{r}=\delta\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{r}. \tag{9.1}$$

在系统转动时不仅径矢的方向改变,而且所有质点的速度也改变,并且所有矢量的变化规律相同.所以速度相对固定坐标系的增量为

$$\delta\boldsymbol{v}=\delta\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{v}. \tag{9.2}$$

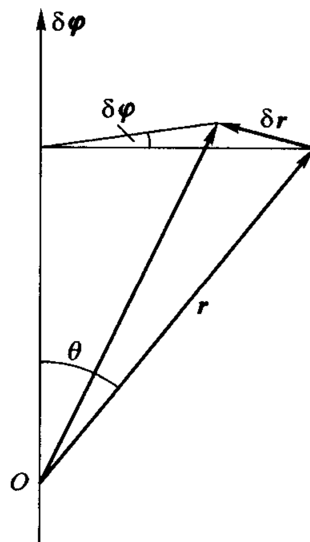


图 5

将这些表达式代入拉格朗日函数不变条件

$$\delta L=\sum_a\left(\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{r}_a}\cdot\delta\boldsymbol{r}_a+\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{v}_a}\cdot\delta\boldsymbol{v}_a\right)=0$$

并做代换$\partial L/\partial\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{p}_a$, $\partial L/\partial\boldsymbol{r}_a=\dot{\boldsymbol{p}}_a$,得

$$\sum_a[\dot{\boldsymbol{p}}_a\cdot(\delta\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{r}_a)+\boldsymbol{p}_a\cdot(\delta\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{v}_a)]=0,$$

或者

$$\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\sum_a(\boldsymbol{r}_a\times\dot{\boldsymbol{p}}_a+\boldsymbol{v}_a\times\boldsymbol{p}_a)=\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_a\boldsymbol{r}_a\times\boldsymbol{p}_a=0.$$

由 $\delta\boldsymbol{\varphi}$ 的任意性可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_a\boldsymbol{r}_a\times\boldsymbol{p}_a=0,$$

即在封闭力学系统运动过程中矢量

$$\boldsymbol{M}=\sum_a\boldsymbol{r}_a\times\boldsymbol{p}_a \tag{9.3}$$

保持不变,这个物理量称为动量矩[1].这个物理量不依赖于质点之间是否有相互作用,它的可加性是显然的.

可加的运动积分就这些.就是说,任何封闭系统都有总共7个这样的运动积分:能量、动量的三个分量和动量矩的三个分量.

既然在动量矩的定义中出现了径矢,它的取值就与坐标原点的选取有关.假定两个坐标原点相差矢量 $\boldsymbol{a}$,同一个点对这两个坐标原点的径矢分别为 $\boldsymbol{r}_a$ 和 $\boldsymbol{r}'_a$,满足关系式 $\boldsymbol{r}_a = \boldsymbol{r}'_a + \boldsymbol{a}$.因此有

$$\boldsymbol{M} = \sum_a \boldsymbol{r}_a \times \boldsymbol{p}_a = \sum_a \boldsymbol{r}'_a \times \boldsymbol{p}_a + \boldsymbol{a} \times \sum_a \boldsymbol{p}_a,$$

或者

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}' + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{P}. \tag{9.4}$$

由此可知,只有在系统整体静止(即 $\boldsymbol{P} = 0$)时,其动量矩不依赖于坐标原点的选择.动量矩值的这种不确定性不会影响到动量矩守恒定律,因为封闭系统的动量也守恒.

我们来推导相对不同参考系 K 和 K′的动量矩之间的关系.设参考系 K′相对 K 的速度为 $\boldsymbol{V}$,它们的坐标原点在某给定时刻重合.那么质点相对两个参考系的径矢相同,速度满足关系式:$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}'_a + \boldsymbol{V}$.于是有

$$\boldsymbol{M} = \sum_a m_a \boldsymbol{r}_a \times \boldsymbol{v}_a = \sum_a m_a \boldsymbol{r}_a \times \boldsymbol{v}'_a + \sum_a m_a \boldsymbol{r}_a \times \boldsymbol{V}.$$

右端第一项是相对参考系 K′的动量矩 $\boldsymbol{M}'$,在第二项中利用质心径矢公式(8.3),可得

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}' + \mu \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{V}. \tag{9.5}$$

这个公式给出了相对不同参考系的动量矩之间的关系,与能量关系式(8.1)和动量关系式(8.5)类似.

如果系统整体相对参考系 K′静止,则 $\boldsymbol{V}$ 是系统质心的速度,而 $\mu \boldsymbol{V}$ 是系统的动量,进而有

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}' + \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{P}. \tag{9.6}$$

就是说,系统的动量矩由相对参考系的"固有动量矩"和整体运动的动量矩 $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{P}$ 构成.

虽然只有封闭系统的动量矩(对任意坐标原点)三个分量都守恒,但是在一定限制下,这个守恒定律对于在外场中运动的系统也成立.从上面推导可以看出,动量矩在外场的对称轴上投影总是守恒的,绕该轴转动的系统力学性质不变,当然,这时动量矩计算是相对位于该轴上的任意点(坐标原点)的.

更重要的情况是中心对称外场,即势能仅仅依赖于到空间中某个特定点(中

---

[1] 也称转动矩或者角动量.

心)的距离.显然,在这种场内运动时,系统动量矩在任意过中心的轴上投影都守恒.就是说,系统相对场中心的动量矩守恒.

另一个例子是,在沿着 z 轴的均匀场中动量矩投影 M_z 守恒,并且坐标原点可以任意选取.

应该指出,动量矩在任意轴(我们就取为 z 轴)上的投影,都可以利用拉格朗日函数的微分运算求得:

$$M_z = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_a}, \tag{9.7}$$

其中 φ 是绕 z 轴的转角.根据前面给出的动量矩守恒的性质,这个结论是显然的,也可以直接计算来验证.利用柱坐标 r, φ, z 有(代入 $x_a = r_a \cos\varphi_a$, $y_a = r_a \sin\varphi_a$):

$$M_z = \sum_a m_a (x_a \dot{y}_a - y_a \dot{x}_a) = \sum_a m_a r_a^2 \dot{\varphi}_a. \tag{9.8}$$

另一方面,拉格朗日函数写成

$$L = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\dot{r}_a^2 + r_a^2 \dot{\varphi}_a + \dot{z}_a^2) - U.$$

将它代入(9.7)即可得(9.8).

习 题

习题 1 用柱坐标 r, φ, z 表示质点动量矩的笛卡儿坐标分量以及动量矩的大小.

答案:

$$M_x = m\sin\varphi(r\dot{z} - z\dot{r}) - mrz\dot{\varphi}\cos\varphi,$$

$$M_y = m\cos\varphi(z\dot{r} - r\dot{z}) - mrz\dot{\varphi}\sin\varphi,$$

$$M_z = mr^2\dot{\varphi},$$

$$M^2 = m^2r^2\dot{\varphi}^2(r^2 + z^2) + m^2(r\dot{z} - z\dot{r})^2.$$

习题 2 用球坐标 r, θ, φ 表示质点动量矩的笛卡儿坐标分量以及动量矩的大小.

答案:

$$M_x = -mr^2(\dot{\theta}\sin\varphi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta\cos\varphi),$$

$$M_y = mr^2(\dot{\theta}\cos\varphi - \dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta\sin\varphi),$$

$$M_z = mr^2\dot{\varphi}\sin^2\theta,$$

$$M^2 = m^2r^4(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta).$$

习题 3 在下列场中运动时动量 $\boldsymbol{P}$ 和动量矩 $\boldsymbol{M}$ 的哪些分量守恒？

a. 无限大均匀平面场.

答案：

$$P_x, P_y, M_z \text{（无限大平面为 } xy \text{ 平面）}.$$

b. 无限长均匀圆柱场.

答案：

$$P_z, M_z \text{（圆柱轴为 } z \text{ 轴）}.$$

c. 无限长均匀棱柱场.

答案：

$$P_z \text{（棱边平行于 } z \text{ 轴）}.$$

d. 两个点场.

答案：

$$M_z \text{（两个点位于 } z \text{ 轴上）}.$$

e. 无限大均匀半平面场.

答案：

$$P_y \text{（无限大半平面是 } xy \text{ 平面上以 } y \text{ 轴为界的）}.$$

f. 均匀圆锥场.

答案：

$$M_z \text{（圆锥轴为 } z \text{ 轴）}.$$

g. 均匀圆环场.

答案：

$$M_z \text{（圆环轴为 } z \text{ 轴）}.$$

h. 无限长均匀圆柱形螺旋线场.

解：绕螺旋轴（z 轴）旋转 $\delta\varphi$ 同时沿着该轴平移 $\frac{h}{2\pi}\delta\varphi$（$h$ 为螺距），拉格朗日函数不改变. 所以有

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial z}\delta z + \frac{\partial L}{\partial \varphi}\delta\varphi = \left(\dot{P}_z \frac{h}{2\pi} + \dot{M}_z\right)\delta\varphi = 0,$$

由此可得

$$P_z \frac{h}{2\pi} + M_z = \text{const}.$$

§10 力学相似性

拉格朗日函数乘以任意常数不会改变运动方程（参见§2）. 在一些情况下，利用这一点，无需求解运动方程就可以得到有关运动性质的重要结论.

我们考虑势能是坐标的齐次函数的情况,即势能函数满足条件

$$U(\alpha \boldsymbol{r}_1, \alpha \boldsymbol{r}_2, \cdots, \alpha \boldsymbol{r}_n) = \alpha^k U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_n), \tag{10.1}$$

其中 α 是任意常数,k 是函数的次数.

我们引入变换,使坐标都变为 α 倍,时间变为 β 倍:

$$\boldsymbol{r}_a \to \alpha \boldsymbol{r}_a, \quad t \to \beta t.$$

这时所有速度 $\boldsymbol{v}_a = \mathrm{d}\boldsymbol{r}_a/\mathrm{d}t$ 变为 α/β 倍,动能变为 α^2/β^2 倍,势能变为 α^k 倍.如果 α 和 β 满足条件

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^k,$$

即

$$\beta = \alpha^{1-k/2},$$

则变换的结果是拉格朗日函数乘以常数 α^k,运动方程保持不变.

所有质点的坐标改变相同的倍数,意味着变换前后的运动轨迹几何上相似,仅仅是尺寸不同.于是我们可以得出结论,如果势能是坐标(笛卡儿坐标)的 k 次齐次函数,则运动方程可以有几何相似的不同轨迹,并且(不同轨迹上的相应点的)运动时间满足关系式

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-k/2}, \tag{10.2}$$

其中 l'/l 是两个轨迹尺寸之比.除了时间以外,在相应时刻不同运动轨迹上相应点的任何力学量之间的关系,都可以用 l'/l 表示.对于速度、能量和动量矩有

$$\frac{v'}{v} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{k/2}, \quad \frac{E'}{E} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{k}, \quad \frac{M'}{M} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1+k/2}, \tag{10.3}$$

下面举几个例子.

我们在后面章节中将会讲到,在微振动情况下势能是坐标的二次函数($k = 2$).由(10.2)可知振动周期与振幅无关.

在均匀力场中势能是坐标的线性函数(参见(5.8)),即 $k = 1$.由(10.2)得

$$\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{l'}{l}}.$$

由此可知,对于重力场中的自由落体,下落时间的平方之比等于下落高度之比.

对于两个质点之间的牛顿引力或者两个电荷之间的库仑力,势能都是与两点间距离成反比,即 $k = -1$.这时

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{3/2},$$

并由此得出结论:轨道运动周期的平方与轨道尺寸的立方成正比(这个结论称为*开普勒第三定律*).

如果力学系统在有限空间中运动,势能是坐标的齐次函数,则动能和势能的

时间平均值存在非常简单的关系,这个关系式称为位力定理.

因为动能是速度的二次函数,根据欧拉齐次函数定理有

$$\sum_a \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{v}_a}\cdot \boldsymbol{v}_a = 2T,$$

或者利用$\partial T/\partial \boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{p}_a$ 写成

$$2T = \sum_a \boldsymbol{p}_a \cdot \boldsymbol{v}_a = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_a \boldsymbol{p}_a \cdot \boldsymbol{r}_a - \sum_a \dot{\boldsymbol{p}}_a \cdot \boldsymbol{r}_a. \tag{10.4}$$

我们下面将这个等式对时间平均.函数 $f(t)$对时间平均是指

$$\bar{f} = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(t)\mathrm{d}t.$$

容易看出,如果函数 $f(t)$是某个有限函数(即不会取值为无穷)$F(t)$对时间的全导数,则 $f(t)$对时间平均等于零.事实上,

$$\bar{f} = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \lim_{\tau\to\infty}\frac{F(\tau)-F(0)}{\tau} = 0.$$

假设系统在有限空间中以有限速度运动,则 $\sum_a \boldsymbol{p}_a \cdot \boldsymbol{r}_a$ 是有限的,等式(10.4)右端第一项对时间平均等于零.根据牛顿方程,将等式(10.4)右端第二项中 $\boldsymbol{p}_a$ 替换为 $-\partial U/\boldsymbol{r}_a$,可得①

$$2\overline{T} = \sum_a \overline{\boldsymbol{r}_a \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_a}}. \tag{10.5}$$

如果势能是所有径矢 $\boldsymbol{r}_a$ 的k 次齐次函数,则根据欧拉定理,等式(10.5)变为

$$2\overline{T} = k\,\overline{U}. \tag{10.6}$$

由于 $\overline{T}+\overline{U}=\overline{E}=E$,可以将等式(10.6)等价地写成

$$\overline{U}=\frac{2}{k+2}E, \qquad \overline{T}=\frac{k}{k+2}E, \tag{10.7}$$

这两个公式将 $\overline{U}$ 和 $\overline{T}$ 用能量表示出来.

对于 $k=2$ 的特殊情况有

$$\overline{T}=\overline{U},$$

即动能和势能对时间平均相等.对于牛顿引力($k=-1$)有

$$2\,\overline{T} = -\,\overline{U}.$$

这时 $E=-\overline{T}$ 表明,只有在能量为负值情况下,在这种引力作用下的运动才能在有限的空间区域内(参见§15).

习 题

习题 1 质量不同势能相同的质点沿着相同轨迹运动,它们的运动时间满

① 等式(10.5)右端表达式有时也称为系统的位力.

足什么关系？

答案：

$$\frac{t'}{t}=\sqrt{\frac{m'}{m}}.$$

习题 2 势能乘以一个常数后，沿着相同轨迹运动的时间有什么变化？

答案：

$$\frac{t'}{t}=\sqrt{\frac{U}{U'}}.$$

第三章

运动方程的积分

§11　一维运动

一个自由度系统的运动称为一维运动.若系统处于定常外部条件下,拉格朗日函数的一般形式为

$$L=\frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2-U(q), \tag{11.1}$$

其中 $a(q)$是广义坐标 q 的函数.如果 q 为笛卡儿坐标(我们就取为 x),则

$$L=\frac{m\dot{x}^2}{2}-U(x). \tag{11.2}$$

相应于这个拉格朗日函数的运动方程可以积分成一般形式.这时甚至没必要给出运动方程本身,可以直接由方程的第一积分——能量守恒定律给出.于是,对于拉格朗日函数(11.2)有

$$\frac{m\dot{x}^2}{2}+U(x)=E.$$

这是一阶微分方程,可以通过分离变量积分出来:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(x)]},$$

进而得到

$$t=\sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E-U(x)}}+\text{const}. \tag{11.3}$$

这里能量 E 和 const 是积分常数.

由于动能实际上是正值,运动中能量总是大于势能,即运动只能发生在

$U(x)<E$ 的空间区域.

例如,函数 $U(x)$的形式如图 6 所示.在图中画出相应于给定能量的水平直线,立即可以得到可能的运动区域,即图 6 中 AB 之间和 C 右侧的区域.

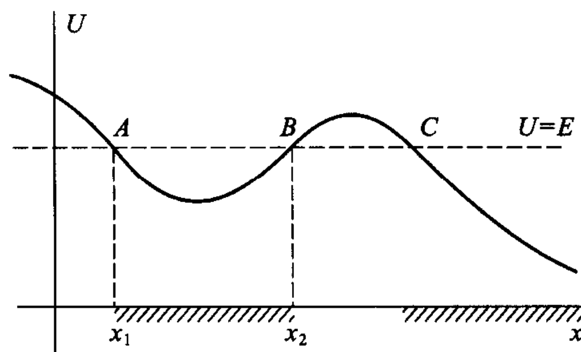


图 6

势能等于能量的点确定了运动边界:

$$U(x)=E. \tag{11.4}$$

由于在这些点速度为零,故称之为*停滞点*.如果运动区域由两个停滞点限定,则运动发生在有限的空间区域内,称为*有限运动*.如果运动区域不受限制或者只有单面限制,则运动是无限的,质点可以运动到无穷远处,称为*无限运动*.

一维有限运动是*振动*,质点在两个边界之间往复运动(在图 6 的点 x_1 和 x_2 之间的*势能阱*中).根据时间的可逆性(参见第 8 页),从 x_1 到 x_2 的运动时间等于从 x_2 到 x_1 的时间.所以,振动周期(从 x_1 运动到 x_2 并返回的时间)等于从 x_1 到 x_2 运动时间的两倍,根据(11.3)有

$$T(E)=\sqrt{2m}\int_{x_1(E)}^{x_2(E)}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E-U(x)}}, \tag{11.5}$$

积分上下限是给定 E 的方程(11.4)的根.这个公式给出了振动周期对能量的依赖关系.

习　　题

习题 1　试求平面单摆(质量为 m,摆长为 l,在重力场中运动)振动周期对振幅的依赖关系.

解:单摆的能量为

$$E=\frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2}-mgl\cos\varphi=-mgl\cos\varphi_0,$$

其中 φ 为绳与竖直方向夹角,φ_0 是最大摆角.周期等于 φ 从零到 φ_0 运动时间的 4 倍:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\sin^2(\varphi_0/2) - \sin^2(\varphi/2)}}.$$

令 $\sin(\varphi/2)/\sin(\varphi_0/2) = \sin\xi$,上面积分写成

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}K\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}\right),$$

其中

$$K(k) = \int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\xi}}$$

称为第一类椭圆积分.当 $\sin(\varphi_0/2)\approx\varphi_0/2\ll 1$(微振动)时,展开函数 $K(k)$ 可得

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\varphi_0^2 + \cdots\right).$$

这个展开式的第一项就是大家都知道的基本公式.

习题 2 试求质量为 m 的质点振动周期对能量的依赖关系,其中质点所处力场的势能为:

a. $U = A|x|^n$.

解:

$$T = 2\sqrt{2m}\int_0^{(E/A)^{1/n}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E - Ax^n}} = \frac{2\sqrt{2m}E^{1/n-1/2}}{A^{1/n}}\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1 - y^n}}.$$

令 $y^n = u$,这个积分式化为用 Γ 函数表示的 B-欧拉积分,

$$T = \frac{2\sqrt{2\pi m}\,\Gamma(1/n)}{nA^{1/n}\Gamma(1/n + 1/2)}E^{1/n - 1/2}.$$

T 对 E 的依赖关系符合力学相似律(10.2)和(10.3).

b. $U = -U_0/\cosh^2\alpha x$, $-U_0 < E < 0$.

答案:

$$T = \frac{\pi\sqrt{2m}}{\alpha\sqrt{|E|}}.$$

c. $U = U_0\tan^2\alpha x$.

答案:

$$T = \frac{\pi\sqrt{2m}}{\alpha\sqrt{E + U_0}}.$$

§ 12 根据振动周期确定势能

现在我们研究如何根据振动周期 T 对能量 E 的依赖关系来确定势能的形式 $U(x)$.从数学的观点看,这是求解积分方程(11.5),其中 $U(x)$ 是未知函数,

而 $T(E)$是已知函数.

我们先不考虑积分方程解存在的可能性问题,假定所求函数 $U(x)$在所研究的空间区域内只有一个极小值.为了方便起见,我们假设势能极小值等于零,并将坐标原点选在势能极小值处(图 7).

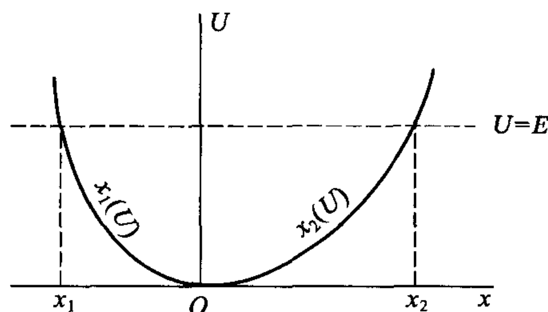


图 7

对积分(11.5)做变换,将坐标 x 当作 U 的函数.函数 $x(U)$是双值的,即每个 U 对应 x 两个不同的值.用$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}U}\mathrm{d}U$ 代替 $\mathrm{d}x$,积分(11.5)变为两个积分之和:从 $x=x_1$ 到 $x=0$ 的积分,从 $x=0$ 到 $x=x_2$ 的积分.我们在这两个区域写出 x 对 U 的依赖关系 $x=x_1(U)$和 $x=x_2(U)$.

显然,对 U 积分的上下限分别为E 和 0,于是有

$$T(E)=\sqrt{2m}\int_0^E\frac{\mathrm{d}x_2(U)}{\mathrm{d}U}\frac{\mathrm{d}U}{\sqrt{E-U}}+\sqrt{2m}\int_E^0\frac{\mathrm{d}x_1(U)}{\mathrm{d}U}\frac{\mathrm{d}U}{\sqrt{E-U}}$$

$$=\sqrt{2m}\int_0^E\left(\frac{\mathrm{d}x_2(U)}{\mathrm{d}U}-\frac{\mathrm{d}x_1(U)}{\mathrm{d}U}\right)\frac{\mathrm{d}U}{\sqrt{E-U}}.$$

将这个等式两边除以$\sqrt{\alpha-E}$,其中 α 是参数,然后对 E 从零到α 积分:

$$\int_0^\alpha\frac{T(E)\mathrm{d}E}{\sqrt{\alpha-E}}=\sqrt{2m}\int_0^\alpha\int_0^E\left(\frac{\mathrm{d}x_2(U)}{\mathrm{d}U}-\frac{\mathrm{d}x_1(U)}{\mathrm{d}U}\right)\frac{\mathrm{d}U\mathrm{d}E}{\sqrt{(\alpha-E)(E-U)}},$$

或者改变积分顺序写成

$$\int_0^\alpha\frac{T(E)\mathrm{d}E}{\sqrt{\alpha-E}}=\sqrt{2m}\int_0^\alpha\left(\frac{\mathrm{d}x_2(U)}{\mathrm{d}U}-\frac{\mathrm{d}x_1(U)}{\mathrm{d}U}\right)\mathrm{d}U\int_U^\alpha\frac{\mathrm{d}E}{\sqrt{(\alpha-E)(E-U)}}.$$

对 E 的积分是很基本的,等于 π.然后对 U 积分可得

$$\int_0^\alpha\frac{T(E)\mathrm{d}E}{\sqrt{\alpha-E}}=\pi\sqrt{2m}[x_2(\alpha)-x_1(\alpha)]$$

(计算中已考虑到 $x_2(0)=x_1(0)=0$).将 α 替换为U,最终得

$$x_2(U)-x_1(U)=\frac{1}{\pi\sqrt{2m}}\int_0^U\frac{T(E)\mathrm{d}E}{\sqrt{U-E}}.\tag{12.1}$$

因此,由函数 $T(E)$可以确定 $x_2(U)-x_1(U)$,但函数 $x_2(U)$和 $x_1(U)$本身却无法确定.这就是说,相应于给定的周期对能量的依赖关系,存在无穷多条曲线 $U=U(x)$,这些曲线之间的差别不改变同一个 U 对应的两个 x 之差.

如果要求曲线 $U=U(x)$关于纵坐标对称,即

$$x_2(U)=-x_1(U)\equiv x(U),$$

则不存在解的多值性问题.这时公式(12.1)给出 $U(x)$的单值表达式:

$$x(U)=\frac{1}{2\pi\sqrt{2m}}\int_0^U\frac{T(E)\mathrm{d}E}{\sqrt{U-E}}. \tag{12.2}$$

§13　折合质量

由两个相互作用的质点组成系统的运动,是非常重要的问题(二体问题),存在一般形式的通解.

作为求解问题的第一步,我们将证明,如果系统的运动分解为质心运动和相对质心的运动,则问题会大大简化.

相互作用的两个质点的势能仅依赖于它们之间的距离,即依赖于它们径矢差的绝对值.所以拉格朗日函数为

$$L=\frac{m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1^2}{2}+\frac{m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2^2}{2}-U(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|). \tag{13.1}$$

引入两点相对位置矢量

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2,$$

并将坐标原点置于质心处,即

$$m_1\boldsymbol{r}_1+m_2\boldsymbol{r}_2=0.$$

从这两个等式可以求出

$$\boldsymbol{r}_1=\frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{r},\quad \boldsymbol{r}_2=-\frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}. \tag{13.2}$$

将这些表达式代入(13.1)可得

$$L=\frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2}-U(r), \tag{13.3}$$

其中

$$m=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2} \tag{13.4}$$

称为折合质量.函数(13.3)形式上等同于一个质点的拉格朗日函数,该质点的质量为 m,在势能为 $U(r)$的对坐标原点对称的场中运动.

因此,二体问题归结为一个质量为 m 的质点在给定外场 $U(r)$ 中的运动. 利用公式(11.2),质点 m_1 和 m_2 的轨迹 $\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_1(t)$ 和 $\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_2(t)$ 可以由 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 求出来.

习　　题

习题　质点系由一个质量为 M 的质点和 n 个质量为 m 的质点组成. 试消去质心运动并将该质点系的运动化为 n 体问题.

解:设 $\boldsymbol{R}$ 是质点 M 的径矢,$\boldsymbol{R}_a(a=1,2,\cdots,n)$ 分别是质量为 m 的各个质点的径矢. 引入质点 M 到质点 m 的径矢

$$\boldsymbol{r}_a=\boldsymbol{R}_a-\boldsymbol{R},$$

并将坐标原点置于质心处,即

$$M\boldsymbol{R}=m\sum_a\boldsymbol{R}_a=0.$$

从这两个等式可以求出

$$\boldsymbol{R}=-\frac{m}{\mu}\sum_a\boldsymbol{r}_a,\quad \boldsymbol{R}_a=\boldsymbol{R}+\boldsymbol{r}_a,$$

其中 $\mu=M+nm$. 将这些表达式代入拉格朗日函数

$$L=\frac{M\dot{\boldsymbol{R}}^2}{2}+\frac{m}{2}\sum_a\dot{\boldsymbol{R}}_a^2-U(r),$$

可得

$$L=\frac{m}{2}\sum_a\boldsymbol{v}_a^2+\frac{m^2}{2\mu}\left(\sum_a\boldsymbol{v}_a\right)^2-U(r),$$

其中 $\boldsymbol{v}_a\equiv\dot{\boldsymbol{r}}_a$.

势能仅依赖于质点之间的距离,可以看作是 $\boldsymbol{r}_a$ 的函数.

§ 14　有心力场内的运动

二体问题可以归结为一个质点的运动,我们仅需要研究质点在外场中的运动,这个外场的势能仅依赖于到给定点的距离,称为有心力场. 作用在质点上的力

$$\boldsymbol{F}=-\frac{\partial U(r)}{\partial\boldsymbol{r}}=-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\frac{\boldsymbol{r}}{r},$$

的大小仅依赖于 r,方向沿着质点的径矢.

在 § 9 已经证明,在有心力场内的运动对场中心的动量矩守恒. 对于一个质点,这个动量矩就是

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}.$$

由于 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 相互垂直，$\boldsymbol{M}$ 不变就意味着在运动过程中质点的径矢总是位于一个平面内，该平面垂直于 $\boldsymbol{M}$.

因此质点在有心力场内运动的整条轨迹都位于一个平面内.引入极坐标 r，φ，写出拉格朗日函数(参见(4.6))

$$L=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)-U(r). \tag{14.1}$$

这个函数不显含坐标 φ.拉格朗日函数不显含的广义坐标称为*循环坐标*.根据拉格朗日方程，对于循环坐标有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial L}{\partial q_i}=0,$$

即相应的广义动量 $p_i=\partial L/\partial \dot{q}_i$ 是运动积分.这将在存在循环坐标情况下大大简化运动方程的积分.

广义动量

$$p_\varphi=mr^2\dot{\varphi}$$

就是动量矩 $M_z=M$(参见(9.8))，因此我们又回到了熟知的动量矩守恒定律

$$M=mr^2\dot{\varphi}=\text{const}. \tag{14.2}$$

可以给出质点在有心力场内平面运动的几何解释.无限接近的两个径矢和轨迹弧长微元围成的扇形面积(图 8)等于$(1/2)\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}\mathrm{d}\varphi$，将它表示为 $\mathrm{d}f$.质点的动量矩可以写成

$$M=2m\dot{f}, \tag{14.3}$$

其中 $\dot{f}$ 称为*扇形速度*.所以动量矩守恒意味着扇形速度为常数，即在相同时间内质点径矢扫过的相同的面积(*开普勒第二定律*)①.

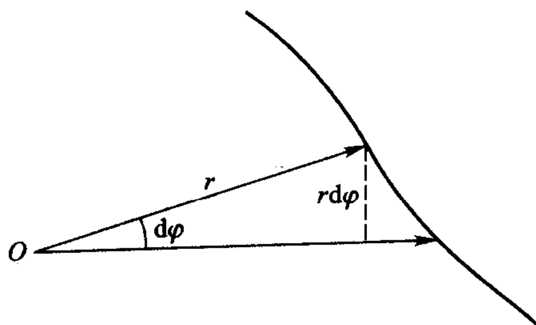


图 8

从能量和动量矩守恒出发，无需写成运动方程，就可以很容易地完全解决质

① 在有心力场内运动质点动量矩守恒定律有时也被称为面积积分.

点在有心力场中的运动问题.利用(14.2)用 M 表示$\dot{\varphi}$,代入能量

$$E=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)+U(r)=\frac{m\dot{r}^2}{2}+\frac{M^2}{2mr^2}+U(r). \tag{14.4}$$

由此可得

$$\dot{r}\equiv\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(r)]-\frac{M^2}{m^2r^2}}, \tag{14.5}$$

分离变量并积分得

$$t=\int\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(r)]-\frac{M^2}{m^2r^2}}}+\text{const}. \tag{14.6}$$

将(14.2)写成

$$\mathrm{d}\varphi=\frac{M}{mr^2}\mathrm{d}t,$$

从(14.5)求出 $\mathrm{d}t$ 代入上式并积分得

$$\varphi=\int\frac{(M/r^2)\mathrm{d}r}{\sqrt{2m[E-U(r)]-M^2/r^2}}+\text{const}. \tag{14.7}$$

公式(14.6)和(14.7)给出了问题的一般形式的通解.公式(14.7)给出了 r 和 φ 的关系,即轨迹方程,而公式(14.6)给出了质点到中心距离 r 随时间变化的隐函数.由公式(14.2)可知$\dot{\varphi}$的符号不会改变,因此 φ 总是随时间单调变化.

公式(14.4)表明,径向运动可以看作是在某个场中的一维运动,该场的“等效”势能为

$$U_{\text{eff}}=U(r)+\frac{M^2}{2mr^2}. \tag{14.8}$$

其中 $M^2/(2mr^2)$称为离心势能.从

$$U(r)+\frac{M^2}{2mr^2}=E \tag{14.9}$$

中求出的 r 给出了运动区域边界到中心的距离.等式(14.9)成立时径向速度$\dot{r}$等于零.但这不能说明质点(在真实一维运动中)静止,这是因为角速度$\dot{\varphi}$不为零.等式$\dot{r}=0$ 表示轨迹的“转折点”,函数 $r(t)$在这个点从增加变为减小或者相反.

如果 r 的变化区域只受$r\geqslant r_{\min}$的限制,则运动是无限的,轨迹可以延伸到无穷远处.

如果 r 的变化区域有两个边界$r_{\min}$和 $r_{\max}$,则运动是有限的,整条轨迹位于 $r=r_{\min}$和 $r=r_{\max}$确定的环形区域内.然而,这不能说明轨迹是封闭曲线.根据(14.7),随着时间的变化,r 从$r_{\max}$到 $r_{\min}$,然后再到 $r_{\max}$,径矢转过的角度 $\Delta\varphi$ 等于

$$\Delta\varphi = 2\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{(M/r^2)\mathrm{d}r}{\sqrt{2m[E-U(r)]-M^2/r^2}}. \tag{14.10}$$

轨迹封闭的条件是这个转角等于 2π 的有理数倍，即 $\Delta\varphi=2\pi m/n$，其中 m，n 是整数.那么质点径矢经过 n 个这样的运动周期，转动 m 圈后，回到初始位置，即轨迹封闭.

然而这是很特殊的情况，对于任意形式 $U(r)$，角 $\Delta\varphi$ 不等于 2π 的有理数倍.因此一般情况下运动轨迹不是封闭的.轨迹无穷多次到达最大和最小距离，最终将两个边界之间的圆环充满(图 9).

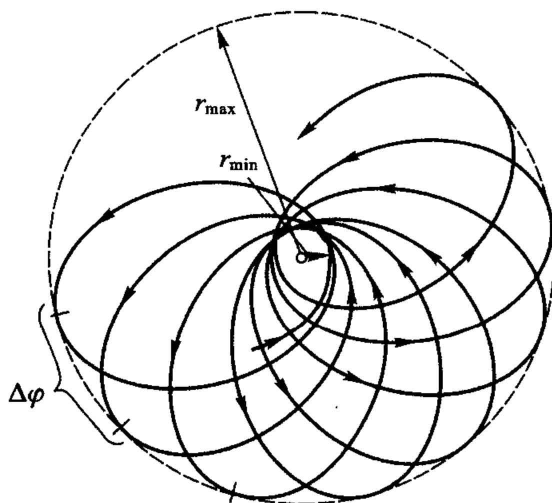


图 9

只有在两种类型的有心力场中的运动是封闭的，这两种场的势能与 $\frac{1}{r}$ 或者 r^2 成正比.第一种将在下一节讨论，第二种相应于空间振子(参见§23 习题 3).

公式(14.5)(以及公式(14.6)和(14.7))中平方根在转折点改变符号.如果角 φ 从指向转折点的径矢方向算起，则在连接该点的两段轨迹上，相同的 r 对应的 φ 只是符号不同.就是说，轨迹相对转折点径矢方向是对称的.比如，我们从某个 $r=r_{\max}$ 点开始，走一段轨迹到达 $r=r_{\min}$ 点，然后走一段对称的轨迹到达下一个 $r=r_{\max}$ 点，依此类推，即整个轨迹可以通过往复重复相同的轨迹段得到.对于由两个从 $r=r_{\min}$ 到无穷远的对称分支组成的无限轨迹也是如此.

当 $r\to0$ 时，离心势能(对 $M\neq0$ 的运动)像 $\frac{1}{r^2}$ 一样趋向无穷大，因此质点通常不可能通过场的中心，即使场本身具有吸引特性也是如此.只有当 $r\to0$ 时势能足够快速地趋向 $-\infty$，质点才可能“落”到场的中心.由不等式

$$\frac{m\dot{r}^2}{2}=E-U(r)-\frac{M^2}{2mr^2}>0$$

或者

$$r^2U(r)+\frac{M^2}{2m}<Er^2$$

可知，r 可能趋于零的条件是

$$r^2U(r)\big|_{r\to 0}<-\frac{M^2}{2m},\tag{14.11}$$

即 $U(r)$应该趋向 $-\infty$，或者像 $-\frac{\alpha}{r^2}\left(\alpha>\frac{M}{2m}\right)$，或者正比于 $-\frac{1}{r^n}(n>2)$.

习　题

习题 1　试积分球面摆的运动方程. 球面摆是指质量为 m 的质点沿着半径为 l 的球面在重力场中运动.

解：设球坐标系原点位于球心，极轴竖直向下，则质点的拉格朗日函数为

$$L=\frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+mgl\cos\theta.$$

显然 φ 是循环坐标，所以广义动量 p_φ 守恒：

$$ml^2\ \dot{\varphi}\sin^2\theta=M_z=\text{const}.\tag{1}$$

能量

$$E=\frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)-mgl\cos\theta=\frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2}+\frac{M_z^2}{2ml^2\sin^2\theta}-mgl\cos\theta.\tag{2}$$

由此求出 $\dot{\theta}$ 并分离变量，得

$$t=\int\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\frac{2}{ml^2}[E-U_{\text{eff}}(\theta)]}}\tag{3}$$

其中等效势能为

$$U_{\text{eff}}(\theta)=\frac{M_z^2}{2ml^2\sin^2\theta}-mgl\cos\theta.$$

利用(1)求出

$$\varphi=\frac{M_z}{l\sqrt{2m}}\int\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta\sqrt{E-U_{\text{eff}}(\theta)}}.\tag{4}$$

积分(3)和(4)分别是第一类和第三类椭圆积分.

角 θ 的运动区域由条件 $E>U_{\text{eff}}$ 确定，而其边界由方程 $E=U_{\text{eff}}$ 确定. 这是 $\cos\theta$ 的三次方程，在 -1 和 $+1$ 之间有两个根，它们对应于球面上的两个平行圆，整条轨迹都位于这两个圆之间.

习题 2　在重力场中质点沿着圆锥运动，圆锥顶角为 2α，竖直放置，顶点向下. 试积分该质点的运动方程.

解:设球坐标原点位于圆锥顶点,极轴竖直向上,则拉格朗日函数为

$$L=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha)-mgr\cos\alpha.$$

显然 φ 是循环坐标,所以广义动量

$$M_z=mr^2\dot{\varphi}\sin^2\alpha.$$

守恒.能量为

$$E=\frac{m\dot{r}^2}{2}+\frac{M_z^2}{2mr^2\sin^2\alpha}+mgr\cos\alpha.$$

利用与习题1同样的方法求出

$$t=\int\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-U_{\text{eff}}(r)]}},$$

$$\varphi=\frac{M_z}{\sqrt{2m}\sin^2\alpha}\int\frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{E-U_{\text{eff}}(r)}},$$

$$U_{\text{eff}}(r)=\frac{M_z^2}{2mr^2\sin^2\alpha}+mgr\cos\alpha.$$

条件 $E=U_{\text{eff}}(r)$是 $\cos\theta$ 的三次方程(当 $M_z\neq0$ 时),有两个正根,它们确定锥面上的两个水平圆,整条轨迹都位于这两个圆之间.

习题3 试积分平面摆的运动方程,摆的悬挂点质量为 m_1,可以沿着水平方向运动(见图2).

解:在§5习题2中已求出拉格朗日函数。x 是循环坐标,所以广义动量 P_x 守恒,即系统的水平动量守恒:

$$P_x=(m_1+m_2)\dot{x}+m_2l\dot{\varphi}\cos\varphi=\text{const}.\tag{1}$$

可以认为系统整体静止,即 const=0,积分方程(1)可得

$$(m_1+m_2)x+m_2l\sin\varphi=\text{const},\tag{2}$$

这表示系统质心在水平方向上静止.利用(1),能量可以写成

$$E=\frac{m_2l^2\dot{\varphi}^2}{2}\left(1-\frac{m_2}{m_1+m_2}\cos^2\varphi\right)-m_2gl\cos\varphi.\tag{3}$$

由此可得

$$t=l\sqrt{\frac{m_2}{2(m_1+m_2)}}\int\sqrt{\frac{m_1+m_2\sin^2\varphi}{E+m_2gl\cos\varphi}}\mathrm{d}\varphi.$$

利用(2),将 m_2 的坐标 $x_2=x+l\sin\varphi$, $y_2=l\cos\varphi$ 用 φ 表示出来,可以求出这个质点的轨迹.这是水平轴为 $lm_1/(m_1+m_2)$竖直轴为 l 的椭圆的一部分.当 $m_1\to\infty$时,就变为通常的沿着一段圆弧运动的单摆.

§ 15　开普勒问题

势能与 r 成反比是有心力场的最重要情况，相应的力与 r^2 成反比．牛顿引力场和库仑电场都属于这种情况，第一种是引力场，第二种可以是引力场也可以是斥力场．

我们首先研究引力场，设

$$U = -\alpha/r, \tag{15.1}$$

其中 α 是正数．"等效"势能

$$U_{\text{eff}} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2} \tag{15.2}$$

的曲线如图 10 所示，当 $r\to 0$ 时趋于 $+\infty$，当 $r\to\infty$ 时从负方向趋于零，当 $r = M^2/m\alpha$ 时取极小值

$$(U_{\text{eff}})_{\min} = -\frac{m\alpha^2}{2M^2}. \tag{15.3}$$

由曲线显而易见，当 $E>0$ 时质点运动是无限的，$E<0$ 时运动是有限的．

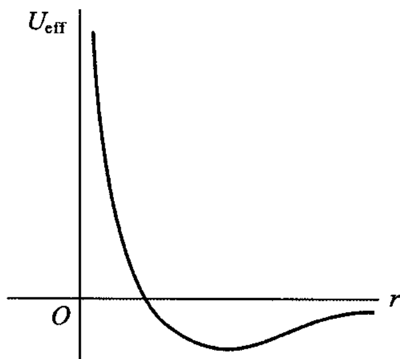


图 10

根据公式(14.7)可得轨迹形状．代入 $U = -\alpha/r$ 并积分可得

$$\varphi = \arccos\frac{M/r - m\alpha/M}{\sqrt{2mE + m^2\alpha^2/M^2}} + \text{const}.$$

选择 φ 的起始位置使得 const = 0，并引入记号

$$p = \frac{M^2}{m\alpha}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}, \tag{15.4}$$

轨迹方程可以重新写成

$$p/r = 1 + e\cos\varphi. \tag{15.5}$$

这是焦点位于坐标原点的圆锥曲线方程，p 和 e 分别称为轨道的参数和偏心率．由(15.5)可以看出，这样选择 φ 的起始位置，就是使 $\varphi = 0$ 的点离中心最近（称该点为轨道近心点）．

在等价的二体问题中，两质点按(15.1)相互作用，每个质点的轨道都是圆锥曲线，其焦点位于系统的公共质心处．

由(15.4)可知，当 $E<0$ 时 $e<1$，即轨道为椭圆（图 11），运动是有限的．根据已知的解析几何公式，椭圆的半长轴和半短轴为

$$a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{\alpha}{2|E|}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}}. \tag{15.6}$$

能量的最小值对应于(15.3)，这时 $e = 0$，即椭圆变为圆．需要指出，椭圆的

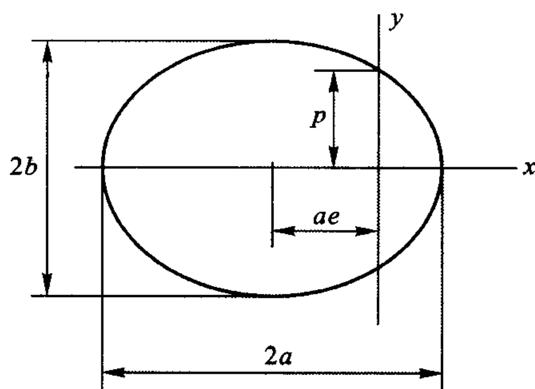


图 11

半长轴仅仅依赖于质点的能量(而与动量矩无关),到场中心(椭圆焦点)的最小和最大距离等于

$$r_{\min}=\frac{p}{1+e}=a(1-e),\quad r_{\max}=\frac{p}{1-e}=a(1+e). \tag{15.7}$$

当然这两个表达式(a 由(15.6)确定,e 由(15.4)确定)可以直接从方程 $U_{\text{eff}}=E$ 求根得到.

根据"面积积分"形式(14.3)的动量矩守恒,可得质点沿着椭圆运动时间,即运动周期 T.对时间从零到 T 积分这个等式,可得

$$2mf=TM,$$

其中 f 是轨道面积.对于椭圆 $f=\pi ab$,根据(15.6)得

$$T=2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{\alpha}}=\pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}. \tag{15.8}$$

在§10 已经指出,周期平方正比于轨道尺寸立方.还需指出,周期仅仅依赖于质点的能量.

当 $E\geqslant0$ 时运动是无限的.如果 $E>0$ 则偏心率 $e>1$,即轨迹是绕过场中心(焦点)的双曲线,如图 12 所示.近心点到中心的距离

$$r_{\min}=\frac{p}{1+e}=a(e-1), \tag{15.9}$$

其中

$$a=\frac{p}{e^2-1}=\frac{\alpha}{2E}$$

是双曲线的"半轴".

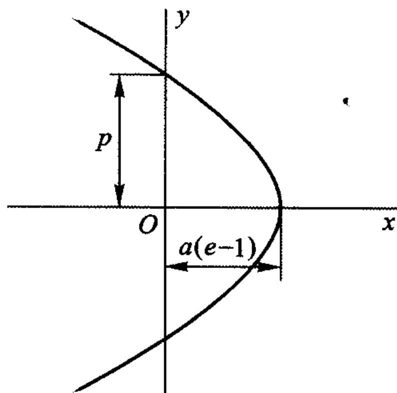


图 12

在 $E=0$ 情况下偏心率 $e=1$,即质点沿着近心点距离为 $r_{\min}=p/2$ 的抛物

线运动.如果质点自无穷远处从静止开始运动,就会出现这种情况.

质点沿着轨道运动时,坐标对时间的依赖关系可以利用(14.6)得到.它可以用下面方式表示成参数形式.

首先研究椭圆轨道.根据(15.4)和(15.6)引入 a 和 e,公式(14.6)可以写成

$$t=\sqrt{\frac{m}{2|E|}}\int\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{-r^2+\frac{\alpha}{|E|}-\frac{M^2}{2m|E|}}}=\sqrt{\frac{ma}{\alpha}}\int\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{a^2e^2-(r-a)^2}}.$$

利用变换

$$r-a=-ae\cos\xi,$$

这个积分写成

$$t=\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}\int(1-e\cos\xi)\mathrm{d}\xi=\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(\xi-e\sin\xi)+\text{const}.$$

选择时间起点使得 const = 0,最终可得 r 依赖于 t 的参数方程:

$$r=a(1-e\cos\xi),\quad t=\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(\xi-e\sin\xi) \tag{15.10}$$

(在 $t=0$ 时刻质点位于近心点).用参数 ξ 还可以表示出质点的笛卡儿坐标 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$($x$ 轴和 y 轴分别沿着半长轴和半短轴).由(15.5)和(15.10)有

$$ex=p-r=a(1-e^2)-a(1-e\cos\xi)=ae(\cos\xi-e),$$

再利用 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ 求出 y.最终可得:

$$x=a(\cos\xi-e),\quad y=a\sqrt{1-e^2}\sin\xi. \tag{15.11}$$

沿着轨道运动一整圈对应着参数 ξ 从零到 2π.

对于双曲线,完全类似地计算可得

$$r=a(e\cosh\xi-1),\quad t=\sqrt{ma^3/\alpha}(e\sinh\xi-\xi),$$
$$x=a(e-\cosh\xi),\quad y=a\sqrt{e^2-1}\sinh\xi, \tag{15.12}$$

其中参数 ξ 取值范围从 $-\infty$ 到 $+\infty$.

下面研究相斥场中的运动,势能为

$$U=\frac{\alpha}{r} \tag{15.13}$$

($\alpha>0$).这种情况下,当 r 从零到 ∞ 时,等效势能

$$U_{\text{eff}}=\frac{\alpha}{r}+\frac{M^2}{2mr^2}$$

从 $+\infty$ 单调减少到零.质点能量只能是正的,运动总是无限的.完全像上面一样计算可知,轨迹是双曲线

$$\frac{p}{r} = -1 + e\cos\varphi \tag{15.14}$$

(p 和 e 由公式(15.4)确定),如图 13 所示.近心点距离为

$$r_{\min} = \frac{p}{e-1} = a(e+1). \tag{15.15}$$

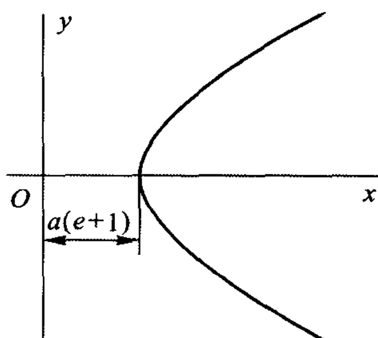


图 13

轨迹参数方程为

$$r = a(e\cosh\xi + 1),\quad t = \sqrt{ma^3/\alpha}\,(e\sinh\xi + \xi),$$
$$x = a(e + \cosh\xi),\quad y = a\sqrt{e^2-1}\sinh\xi. \tag{15.16}$$

在本节的最后我们来证明,在有心力场 $U = \alpha/r$(α 的符号任意)内的运动有其特有的运动积分.很容易直接计算验证:

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{M} + \frac{\alpha\boldsymbol{r}}{r} = \text{const}. \tag{15.17}$$

事实上,上式对时间的全导数等于

$$\dot{\boldsymbol{v}}\times\boldsymbol{M} + \frac{\alpha\boldsymbol{v}}{r} - \frac{\alpha\boldsymbol{r}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r})}{r^3},$$

将 $\boldsymbol{M} = m\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$ 代入后得

$$m\boldsymbol{r}(\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}) - m\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}) + \frac{\alpha\boldsymbol{v}}{r} - \frac{\alpha\boldsymbol{r}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r})}{r^3}.$$

再根据运动方程 $m\dot{\boldsymbol{v}} = \alpha\boldsymbol{r}/r^3$ 可知上面表达式等于零.守恒矢量(15.17)的方向沿着半长轴从焦点指向近心点,其大小等于 αe.这很容易通过计算该矢量在近心点的值来验证.

需要着重指出,运动积分(15.17)像积分 M 和 E 一样,是质点状态(位置和速度)的单值函数.在 §50 我们将发现,这个附加的单值积分的出现与运动退化有关.

习　题

习题 1　质点在场 $U = -\alpha/r$ 内运动,能量 $E = 0$(沿着抛物线运动),试求质点坐标对时间的依赖关系.

解:对积分

$$t = \int \frac{r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{\dfrac{2\alpha}{m}r - \dfrac{M^2}{m^2}}}$$

做变换

$$r=\frac{M^2}{2m\alpha}(1+\eta^2)=\frac{p}{2}(1+\eta^2),$$

可得如下参数方程：

$$r=\frac{p}{2}(1+\eta^2),\quad t=\sqrt{\frac{mp^3}{\alpha}}\ \frac{\eta}{2}\left(1+\frac{\eta^2}{3}\right),\quad x=\frac{p}{2}(1-\eta^2),\quad y=p\eta.$$

参数 η 取值范围为 $-\infty$ 到 $+\infty$.

习题 2 质点在有心力场 $U=-\frac{\alpha}{r^2}$,($\alpha>0$)内运动,试积分运动方程.

解:按照公式(14.6)和(14.7),对 φ 和 t 的计算起点做适当选择可得

a) 当 $E>0,\frac{M^2}{2m}>\alpha$ 时,

$$\frac{1}{r}=\sqrt{\frac{2mE}{M^2-2m\alpha}}\cos\left(\varphi\sqrt{1-\frac{2m\alpha}{M^2}}\right),$$

b) 当 $E>0,\frac{M^2}{2m}<\alpha$ 时,

$$\frac{1}{r}=\sqrt{\frac{2mE}{2m\alpha-M^2}}\sinh\left(\varphi\sqrt{\frac{2m\alpha}{M^2}-1}\right),$$

c) 当 $E<0,\frac{M^2}{2m}<\alpha$ 时,

$$\frac{1}{r}=\sqrt{\frac{2m|E|}{2m\alpha-M^2}}\cosh\left(\varphi\sqrt{\frac{2m\alpha}{M^2}-1}\right).$$

在这三种情况下都有

$$t=\frac{1}{E}\sqrt{\frac{m}{2}}\sqrt{Er^2-\frac{M^2}{2m}+\alpha}.$$

在情况 b)和 c),当 $\varphi\to\infty$ 时,质点沿着趋向坐标原点的轨迹"落向"中心.从给定的距离 r 开始的降落时间等于

$$\frac{1}{E}\sqrt{\frac{m}{2}}\left(\sqrt{\alpha-\frac{M^2}{2m}+Er^2}-\sqrt{\alpha-\frac{M^2}{2m}}\right).$$

习题 3 在势能 $U=-\alpha/r$ 上增加一个小量 δU,有限运动的轨迹变为封闭的,并且每运动一圈轨道的近心点都有很小的改变量 $\delta\varphi$.在下面情况下求 $\delta\varphi$: a)$\delta U=\beta/r^2$,b)$\delta U=\gamma/r^3$.

解:当 r 从 $r_{\min}$ 到 $r_{\max}$ 再重新回到 $r_{\min}$ 时,角变化量 $\delta\varphi$ 由公式(14.10)给出.为了避免虚假发散,将公式(14.10)改写成

$$\Delta\varphi=-2\frac{\partial}{\partial M}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\sqrt{2m(E-U)-\frac{M^2}{r^2}}\mathrm{d}r$$

代入 $U=-\alpha/r+\delta U$ 并将被积式按 δU 分解,零阶项为 2π,一阶项就是所求的

$\delta\varphi$:

$$\delta\varphi = \frac{\partial}{\partial M}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{2m\delta U \mathrm{d}r}{\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{M^2}{r^2}}} = \frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{2m}{M}\int_0^{\pi} r^2 \delta U \mathrm{d}\varphi\right), \tag{1}$$

其中对 r 的积分变为沿着"无扰"运动轨迹对 φ 的积分.

对于情况 a),公式(1)中的积分是很寻常的,得

$$\delta\varphi = -\frac{2\pi\beta m}{M^2} = -\frac{2\pi\beta}{\alpha p}$$

(p 是无扰椭圆(15.4)的参数).在情况 b)中 $r^2\delta U = \gamma/r$,由(15.5)求出 $1/r$ 代入(1)后可得

$$\delta\varphi = -\frac{6\pi\alpha\gamma m^2}{M^4} = -\frac{6\pi\gamma}{\alpha p^2}.$$

第四章

质点碰撞

§ 16　质点分裂

利用动量守恒和能量守恒定律可以得到一系列关于各种力学过程特性的结论.特别重要的是,这些性质完全不依赖于质点间具体的相互作用形式.

首先,我们研究质点“自动”(没有外力作用)分裂成两个“组成部分”的问题,分裂后两个质点独立运动.

在质点(分裂前)静止的参考系中观察这个过程是最简单的.根据动量守恒定律,分裂后两个质点的动量之和仍为零,即两个质点的动量大小相等方向相反.动量的大小(p_0)可以由能量守恒定律

$$E_{vn} = E_{1vn} + \frac{p_0^2}{2m_1} + E_{2vn} + \frac{p_0^2}{2m_2}$$

确定,其中 m_1 和 m_2 是两个质点的质量,E_{1vn}和 E_{2vn}是它们的内能,而 E_{vn}是原来(分裂)质点的初始内能.用 ε 表示“分裂能”,即

$$\varepsilon = E_{vn} - E_{1vn} - E_{2vn} \tag{16.1}$$

(显然,这个量应该是正的,这样分裂才可能发生).这时有

$$\varepsilon = \frac{p_0^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{p_0^2}{2m}, \tag{16.2}$$

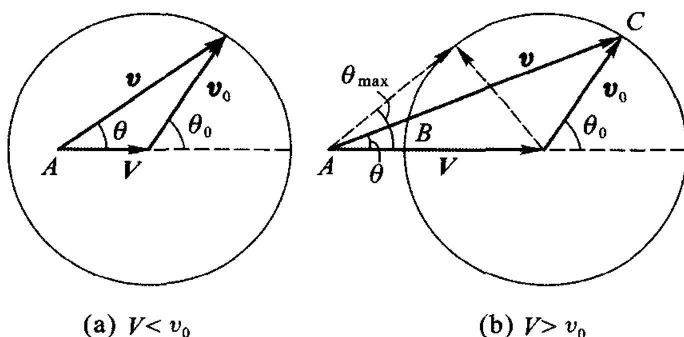
由此确定 p_0(m 是两个质点的折合质量),两个质点的速度分别为 $v_{10} = p_0/m_1$ 和 $v_{20} = p_0/m_2$.

下面我们换一个参考系,分裂前质点以速度 $\boldsymbol{V}$ 相对该参考系运动.通常称这个参考系为实验室参考系,它不同于总动量等于零的质心参考系.设$\boldsymbol{v}$ 和$\boldsymbol{v}_0$是

分裂后一个质点相对实验室参考系和质心参考系的速度. 利用等式 $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}_0$ 或者 $\mathbf{v} - \mathbf{V} = \mathbf{v}_0$ 可得

$$v^2 + V^2 - 2vV\cos\theta = v_0^2, \tag{16.3}$$

其中 θ 是质点相对 $\mathbf{V}$ 方向飞出的角度. 这个方程给出了在实验室参考系中分裂质点速度对飞出方向的依赖关系.



(a) $V < v_0$　　(b) $V > v_0$

图 14

图 14 借助图解法给出了这个关系. 点 A 距圆心的距离为 V, 速度 $\mathbf{v}$ 矢量从 A 点指向半径为 v_0 的圆周上一点[①]. 图 14(a) 和 (b) 分别相应于 $V < v_0$ 和 $V > v_0$ 的情况. 第一种情况下质点可以任意角度 θ 飞出, 第二种情况下质点只能向前飞出, 飞出角度 θ 不超过下式给出的 θ_{max},

$$\sin\theta_{max} = \frac{v_0}{V} \tag{16.4}$$

(从 A 作圆的切线的方向).

在实验室参考系和质心参考系中飞出角 θ 和 θ_0 的关系, 显然也可以由图解法给出:

$$\tan\theta = \frac{v_0\sin\theta_0}{v_0\cos\theta_0 + V}. \tag{16.5}$$

求解这个方程可得

$$\cos\theta_0 = -\frac{V}{v_0}\sin^2\theta \pm \cos\theta\sqrt{1 - \frac{V^2}{v_0^2}\sin^2\theta}. \tag{16.6}$$

由图 14(a) 可以看出, 当 $v_0 > V$ 时 θ 和 θ_0 之间的关系是单值的. 这时在公式 (16.6) 中根号前面取"+"号 (使得 $\theta = 0$ 时 $\theta_0 = 0$). 如果 $v_0 < V$, θ 和 θ_0 之间的关系不是单值的: 每个 θ 对应两个 θ_0 (图 14(b)), 它们相应于从圆心指向 B 或

① 确切地说是半径为 v_0 的球, 图 14 上画的是该球的直径截面.

者 C 的矢量$\boldsymbol{v}_0$，也对应于公式(16.6)中根号前两个符号.

在物理应用中经常遇到的分裂质点不是一个，而是很多个，这就产生了分裂的质点按方向、能量等分布的问题.这时我们假设，原来质点在空间中运动方向是混沌的，即在平均意义下是各向同性的.

在质心参考系中这个问题是很简单的：所有(相同类型的)分裂质点具有相同的能量，它们飞出方向分布是各向同性的，这与质点运动方向混沌假设相关.就是说，位于立体角微元 $\mathrm{d}O_0$ 中飞行的质点数所占的比例正比于该微元的大小，即等于 $\mathrm{d}O_0/4\pi$.代入 $\mathrm{d}O_0=2\pi\sin\theta_0\mathrm{d}\theta_0$ 后可得按角 θ_0 的分布：

$$\frac{1}{2}\sin\theta_0\mathrm{d}\theta_0. \tag{16.7}$$

在实验室参考系中的分布可以通过变换得到.例如，我们来确定在实验室参考系中的动能分布.将等式$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{V}$ 平方得

$$v^2=v_0{}^2+V^2+2v_0V\cos\theta_0,$$

由此有

$$\mathrm{d}\cos\theta_0=\frac{\mathrm{d}(v^2)}{2v_0V}.$$

引入动能 $T=mv^2/2$(其中 m 是m_1 或者 m_2，取决于我们研究哪类分裂质点)并代入(16.7)可得

$$\frac{\mathrm{d}T}{2mv_0V}. \tag{16.8}$$

动能的取值范围从最小值 $T_{\min}=(m/2)(v_0-V)^2$ 到最大值 $T_{\max}=(m/2)(v_0+V)^2$.在这个区段内质点按照(16.8)均匀分布.

在质点分裂成多于两个部分时，动量守恒和能量守恒仍然成立.当然，分裂质点的速度和方向会有更大的任意性.特别是分裂质点在质心参考系中的能量不再具有确定的值，但是每个分裂质点的动能存在上限.

为了确定这个上限，除了一个给定质点(质量为 m_1)，我们将所有其它质点看作一个系统，其内能用 E'_{vn}表示.根据(16.1)和(16.2)，质点 m_1 的动能等于

$$T_{10}=\frac{p_0^2}{2m_1}=\frac{M-m_1}{M}(E_{\mathrm{vn}}-E_{1\mathrm{vn}}-E'_{\mathrm{vn}})$$

(M 是原来质点的质量).显然，当 E'_{vn}最小时 T_{10}取最大值.为此，除了 m_1 以外所有其它分裂质点具有相同的速度，那么 E'_{vn}就是它们的内能之和，而 $E_{\mathrm{vn}}-E_{1\mathrm{vn}}-E'_{\mathrm{vn}}$就是分裂能 ε.于是有

$$(T_{10})_{\max}=\frac{M-m_1}{M}\varepsilon. \tag{16.9}$$

习 题

习题 1 试求质点分裂后两个质点飞出角 θ_1 和 θ_2 之间的关系(在实验室参考系中).

解:在质心参考系中两个飞出角满足关系 $\theta_{10}=\pi-\theta_{20}$. 将 θ_{10} 简记为 θ_0, 对每个分裂质点利用公式(16.5)可得

$$V+v_{10}\cos\theta_0=v_{10}\sin\theta_0\cot\theta_1,$$

$$V-v_{20}\cos\theta_0=v_{20}\sin\theta_0\cot\theta_2.$$

应该从这两个等式中消去 θ_0. 为此, 首先从中求出 $\sin\theta_0$ 和 $\cos\theta_0$, 然后代入 $\cos^2\theta_0+\sin^2\theta_0=1$. 再考虑到 $v_{10}/v_{20}=m_2/m_1$, 利用公式(16.2)可得

$$\frac{m_2}{m_1}\sin^2\theta_2+\frac{m_1}{m_2}\sin^2\theta_1-2\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\theta_1+\theta_2)=\frac{2\varepsilon}{(m_1+m_2)V^2}\sin^2(\theta_1+\theta_2).$$

习题 2 试求实验室参考系中分裂质点的飞出方向分布.

解:当 $v_0>V$ 时将(16.6)代入(16.7), 其中根号前面取正号, 可得

$$\frac{\sin\theta\mathrm{d}\theta}{2}\left[2\frac{V}{v_0}\cos\theta+\frac{1+(V^2/v_0^2)\cos2\theta}{\sqrt{1-(V^2/v_0^2)\sin^2\theta}}\right]\quad(0\leqslant\theta\leqslant\pi).$$

当 $v_0<V$ 时, 应该考虑 θ 和 θ_0 的两种可能关系. 当 θ 增大时, 与之对应的两个 θ_0 中有一个也增大, 另一个则减小, 因此应该取(16.6)中根号前两个符号对应表达式之差(而不是和), 来计算 $\mathrm{d}\cos\theta_0$. 最后得

$$\sin\theta\mathrm{d}\theta\frac{1+(V^2/v_0^2)\cos2\theta}{\sqrt{1-(V^2/v_0^2)\sin^2\theta}}\quad(0\leqslant\theta\leqslant\theta_{\max}).$$

习题 3 试求在实验室参考系中两个分裂质点飞出方向之间夹角 θ 的取值范围.

解:角 θ 是 θ_1 与 θ_2 之和(参见习题 1), 角 θ_1 和 θ_2 由公式(16.5)确定. $\tan\theta$ 的计算非常简单. 研究所得表达式的极值可以给出 θ 的可能取值范围, 这依赖于 V, v_{10}, v_{20} 的相对值(为了确定性, 我们假设 $v_{20}>v_{10}$):

如果 $v_{10}<V<v_{20}$, 则 $0<\theta<\pi$,

如果 $V<v_{10}$, 则 $\pi-\theta_m<\theta<\pi$,

如果 $V>v_{20}$, 则 $0<\theta<\theta_m$, 其中 θ_m 满足

$$\sin\theta_m=\frac{V(v_{10}+v_{20})}{V^2+v_{10}v_{20}}.$$

§17 质点弹性碰撞

如果两个质点碰撞不改变它们的内部状态, 则称为弹性碰撞. 对于这样的碰

撞应用能量守恒定律时不必考虑内能.

在质心参考系中研究碰撞最简单. 像上节一样,我们用下标 0 表示物理量在这个参考系中的值. 碰撞前两个质点在质心参考系中的速度与实验室参考系中 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 的关系为

$$\boldsymbol{v}_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{v}_{20} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\boldsymbol{v},$$

其中 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$ (参见(13.2)).

根据动量守恒定律,碰撞后两个质点动量的大小相等方向相反,又根据能量守恒定律,它们的绝对值也不变. 于是,碰撞的结果是使两个质点在质心参考系中的速度方向相反大小不变. 如果用单位矢量 $\boldsymbol{n}_0$ 表示碰撞后质点 m_1 速度方向,则两个质点碰撞后速度(用撇号表示)为

$$\boldsymbol{v}'_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v\boldsymbol{n}_0, \quad \boldsymbol{v}'_{20} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v\boldsymbol{n}_0. \tag{17.1}$$

为了变换到实验室参考系,需要在这些表达式中增加质心速度 $\boldsymbol{V}$. 于是,两个质点在实验室参考系中的碰撞后速度为

$$\boldsymbol{v}'_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v\boldsymbol{n}_0 + \frac{m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2}, \quad \boldsymbol{v}'_{20} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v\boldsymbol{n}_0 + \frac{m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2}. \tag{17.2}$$

利用动量和能量守恒定律只能得到这些关于碰撞的结论. 矢量 $\boldsymbol{n}_0$ 的方向与质点之间相互作用规律以及碰撞时的相互位置有关.

对于上述结果可以给出几何解释,为此将速度变为动量会更加方便. 将等式(17.2)分别乘以 m_1 和 m_2 可得

$$\boldsymbol{p}'_{10} = mv\boldsymbol{n}_0 + \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2), \quad \boldsymbol{p}'_{20} = -mv\boldsymbol{n}_0 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2). \tag{17.3}$$

($m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$是折合质量). 如图 15 所示,作半径为 mv 的圆. 如果单位矢量 $\boldsymbol{n}_0$ 沿着 $\overrightarrow{OC}$,则矢量 $\overrightarrow{AC}$ 和 $\overrightarrow{CB}$ 分别给出动量 $\boldsymbol{p}'_1$ 和 $\boldsymbol{p}'_2$. 在给定 $\boldsymbol{p}'_1$ 和 $\boldsymbol{p}'_2$ 时,圆的半径不变,A 和 B 点的位置也不变,而 C 点可以位于圆周上任何位置.

$$\overrightarrow{OC} = m\boldsymbol{v},$$

$$\overrightarrow{AO} = \frac{m_1(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)}{m_1 + m_2},$$

$$\overrightarrow{OB} = \frac{m_2(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)}{m_1 + m_2}$$

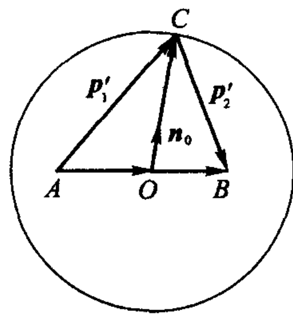


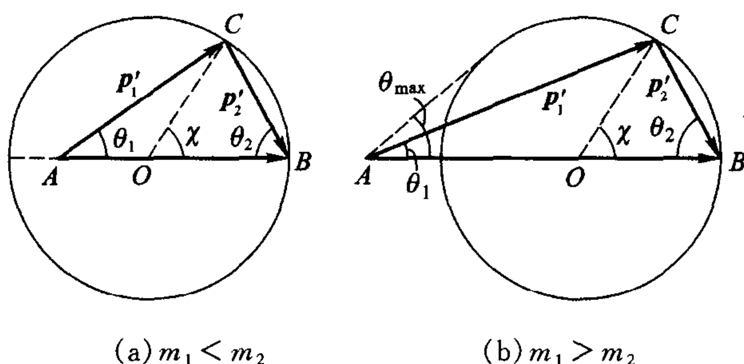
图 15

$$\overrightarrow{AB} = p_1,$$

$$AO/OB = m_1/m_2$$

我们研究碰撞前有一个质点(设为 m_2)静止的情况.这种情况下 $OB = \frac{m_2}{m_1+m_2}p_1$ 的长度与半径相等,即 B 点在圆周上.矢量$\overrightarrow{AB}$等于碰撞前第一个质点的动量 $\boldsymbol{p}_1$.点 A 位于圆内(当 $m_1 < m_2$ 时)或者圆外(当 $m_1 > m_2$ 时).相应的情况如图 16(a)和(b)所示.图中的 θ_1 和 θ_2 是碰撞后质点偏离撞击方向($\boldsymbol{p}_1$ 方向)的角度.图中圆心角 χ(给出 $\boldsymbol{n}_0$ 的方向)是第一个质点在质心参考系中的偏转角.由图中可见,角 θ_1 和 θ_2 可以用 χ 表示出来

$$\tan\theta_1 = \frac{m_2\sin\chi}{m_1 + m_2\cos\chi}, \quad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}. \tag{17.4}$$



(a) $m_1 < m_2$　　(b) $m_1 > m_2$

图 16

我们还可以用 χ 写出碰撞后两个质点的速度的绝对值:

$$v_1' = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\cos\chi}}{m_1 + m_2}, \quad v_2' = \frac{2m_1v}{m_1 + m_2}\sin\frac{\chi}{2}. \tag{17.5}$$

$\theta_1 + \theta_2$ 是碰撞后质点飞出方向之间的夹角.显然,当 $m_1 < m_2$ 时 $\theta_1 + \theta_2 > \pi/2$,当 $m_1 > m_2$ 时 $\theta_1 + \theta_2 < \pi/2$.

碰撞后两个质点沿着一条直线运动的情况(正碰撞)相应于 $\chi = \pi$,即 C 点或者位于直径上并在 A 点左边(图 16(a),这时 $\boldsymbol{p}_1'$ 和 $\boldsymbol{p}_2'$ 相互反向),或者位于 A 和 O 之间(图 16(b),这时 $\boldsymbol{p}_1'$ 和 $\boldsymbol{p}_2'$ 的方向相同).

这种情况下碰撞后质点速度等于

$$\boldsymbol{v}_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{v}_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\boldsymbol{v}. \tag{17.6}$$

这时 $\boldsymbol{v}_2'$ 取最大可能值,原来静止的质点碰撞后获得最大能量等于

$$E_{2\max}' = \frac{m_2 v_{2\max}'^2}{2} = \frac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2}E_1, \tag{17.7}$$

其中 $E_1=\frac{m_1 v_1^2}{2}$是原来运动质点的初始能量.

当 $m_1 < m_2$ 时，碰撞后第一个质点的速度可以沿这任意方向.如果 $m_1 > m_2$，则偏角不能超过某个最大值，这个最大值相应于使 AC 与圆相切的 C 点(图 16(b)).显然，$\sin\theta_{1\max}=OC/OA$，或者

$$\sin\theta_{1\max}=\frac{m_2}{m_1}. \qquad (17.8)$$

两个质量相同的质点(一个初始静止)的碰撞特别简单.这种情况下 A 点和 B 点都位于圆周上(图 17).这时有

$$\theta_1=\frac{\chi}{2}, \quad \theta_2=\frac{\pi-\chi}{2}, \qquad (17.9)$$

$$v_1'=v\cos\frac{\chi}{2}, \quad v_2'=v\sin\frac{\chi}{2}. \qquad (17.10)$$

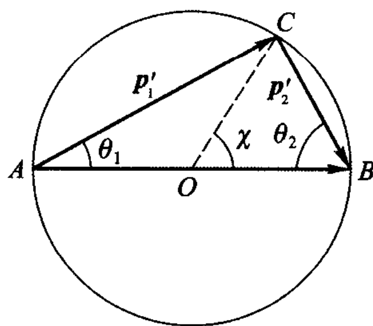


图 17

可见，碰撞后两个质点飞出方向相互垂直.

习 题

习题 运动质点 m_1 和静止质点 m_2 发生碰撞，试用实验室参考系中的偏角表示两个质点碰撞后速度.

解：由图 16 有 $p_2'=2OB\cos\theta_2$ 或者 $v_2'=2v\frac{m}{m_2}\cos\theta_2$.对于动量 $p_1'=AC$ 有方程

$$OC^2=AO^2+p_1'^2-2AO\cdot p_1'\cos\theta_1$$

或者

$$\left(\frac{v_1'}{v}\right)^2-\frac{2m}{m_2}\frac{v_1'}{v}\cos\theta_1+\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}=0.$$

由此得

$$\frac{v_1'}{v}=\frac{m_1}{m_1+m_2}\cos\theta_1\pm\frac{1}{m_1+m_2}\sqrt{m_2^2-m_1^2\sin^2\theta_1}$$

(当 $m_1 > m_2$ 时根号可以取两个值，当 $m_1 > m_2$ 时根号只能取正号).

§ 18 质点散射

上一节已经指出，要完全确定两个质点的碰撞结果，必须求解记及质点相互作用具体规律的运动方程.

首先，我们按照一般法则来研究一个等效的问题，这是一个质量为 m 的质点在固定中心(位于质心)的力场 $U(r)$中偏转问题.

在§14已经指出,质点在有心力场中的轨迹,相对过近心点的直线(图18上的 OA)对称.所以,轨迹的两条渐近线与该直线的夹角相同.如果记该角为 φ_0,则由图可见,质点飞过中心附近产生的偏转角 χ 等于

$$\chi=|\pi-2\varphi_0|. \tag{18.1}$$

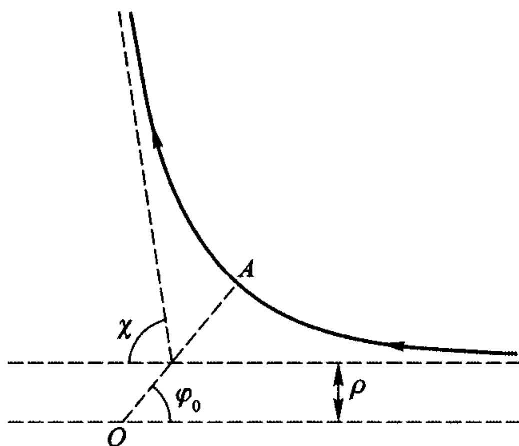


图 18

根据(14.7),确定 φ_0 的积分是从轨迹近心点到无穷远:

$$\varphi_0=\int_{r_{\min}}^{\infty}\frac{(M/r^2)\mathrm{d}r}{\sqrt{2m[E-U(r)]-M^2/r^2}}. \tag{18.2}$$

需要注意,$r_{\min}$是上式根号内表达式的根.

在所讨论的无限运动情况下,引入质点在无穷远处速度 v_∞ 和瞄准距离 ρ 来代替常数 E 和 M.瞄准距离是指中心到 v_∞ 的垂直距离,即不存在力场情况下质点飞过中心时的距离(图18).能量和动量矩可表示为

$$E=\frac{mv_\infty^2}{2},\quad M=m\rho v_\infty, \tag{18.3}$$

而公式(18.2)变为

$$\varphi_0=\int_{r_{\min}}^{\infty}\frac{(\rho/r^2)\mathrm{d}r}{\sqrt{1-\rho^2/r^2-2U/mv_\infty^2}}. \tag{18.4}$$

由方程(18.1)和(18.4)可以求出 χ 对 ρ 的依赖关系.

在物理应用中经常遇到的不是一个质点的偏转问题,而是以相同速度 $\boldsymbol{v}_\infty$ 飞过散射中心的质点束的散射.不同的质点有不同的瞄准距离,因此以不同的角度 χ 散射.我们用 $\mathrm{d}N$ 表示单位时间内偏转角在 χ 和 $\chi+\mathrm{d}\chi$ 之间的散射质点数.因为这个数依赖于(正比于)质点束的密度,它对于刻画散射过程并不方便.所以我们引入

$$\mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}N/n, \tag{18.5}$$

其中 n 是单位时间内通过质点束横截面单位面积的质点数(当然,我们假设质点束在横截面上是均匀的).这个量的单位是面积单位,称为**散射等效截面**.它完全由散射场的形式决定,是描述散射过程的重要物理量.

如果散射角是瞄准距离的单调递减函数,则 χ 和 ρ 是一一对应的.这种情况下,在 χ 和 $\chi+\mathrm{d}\chi$ 之间的散射质点,其瞄准距离在确定的 ρ 和 $\rho+\mathrm{d}\rho$ 之间.这样的质点数等于 n 乘以内外径为 ρ 和 $\rho+\mathrm{d}\rho$ 圆环的面积,即 $\mathrm{d}N=2\pi\rho\mathrm{d}\rho\cdot n$.由此可得等效截面

$$\mathrm{d}\sigma=2\pi\rho\mathrm{d}\rho. \tag{18.6}$$

为了求得等效截面对散射角的依赖关系,将上式改写成

$$\mathrm{d}\sigma=2\pi\rho(\chi)\left|\frac{\mathrm{d}\rho(\chi)}{\mathrm{d}\chi}\right|\mathrm{d}\chi. \tag{18.7}$$

这里我们加上绝对值符号是因为 $\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}\chi$ 可能取负值①.通常 $\mathrm{d}\sigma$ 不是对应平面角微元 $\mathrm{d}\chi$,而是空间角微元 $\mathrm{d}o$.在 χ 和 $\chi+\mathrm{d}\chi$ 之间的角微元为 $\mathrm{d}o=2\pi\sin\chi\mathrm{d}\chi$.由(18.7)有

$$\mathrm{d}\sigma=\frac{\rho(\chi)}{\sin\chi}\left|\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\chi}\right|\mathrm{d}o. \tag{18.8}$$

我们回到实际物理问题,质点束散射不是发生在不动有心力场中,而是发生在其它初始静止的质点附近.公式(18.7)给出了质心参考系中等效截面对散射角的依赖关系.为了得到实验室参考系中等效截面对散射角的依赖关系,需要用公式(17.4),将 χ 用 θ 表示出来.这样可以得到质点束散射截面的表达式(用 θ_1 表示 χ)和初始静止质点的表达式(用 θ_2 表示 χ).

习 题

习题1 试求质点在半径为 a 的刚性球上散射的等效截面(即作用规律是当 $r<a$ 时 $U=\infty$,当 $r>a$ 时 $U=0$).

解:质点在球外自由运动,又不可能进入球内,因此质点的轨迹由两条直线组成,这两条直线相对过其交点的半径对称(图19).由图可见,

$$\rho=a\sin\varphi_0=a\sin\frac{\pi-\chi}{2}=a\cos\frac{\chi}{2}.$$

代入公式(18.7)或(18.8)可得

$$\mathrm{d}\sigma=\frac{\pi a^2}{2}\sin\chi\mathrm{d}\chi=\frac{a^2}{4}\mathrm{d}o, \tag{1}$$

① 如果函数 $\rho(\chi)$ 是多值的,则显然需要对该函数的各个分支表达式求和.

即在质心参考系中散射各向同性.积分可得,全截面 $\sigma=\pi a^2$ 就是球的截面面积,这相应于瞄准面积,即必须击中这个面积才能发生散射.

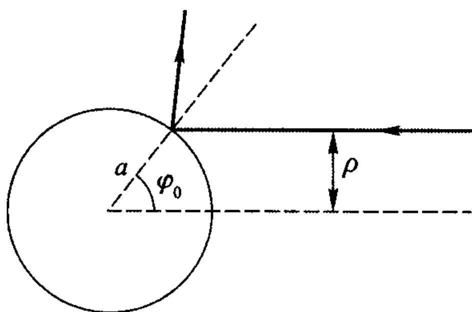


图 19

为了转换到实验室参考系中,要根据(17.4)用 θ_1 表示 χ.计算完全与§16习题2类似(因为(17.4)与(16.5)在形式上是相同的).当 $m_1<m_2$ 时(m_1 是质点的质量,m_2 是球的质量),可得

$$d\sigma_1=\frac{a^2}{4}\left[2\frac{m_1}{m_2}\cos\theta_1+\frac{1+(m_1^2/m_2^2)\cos2\theta_1}{\sqrt{1-(m_1^2/m_2^2)\sin^2\theta_1}}\right]do_1$$

($do_1=2\pi\sin\theta_1 d\theta_1$).如果 $m_2<m_1$,则

$$d\sigma_1=\frac{a^2}{2}\frac{1+(m_1^2/m_2^2)\cos2\theta_1}{\sqrt{1-(m_1^2/m_2^2)\sin^2\theta_1}}do_1.$$

当 $m_1=m_2$ 时,有

$$d\sigma_1=a^2|\cos\theta_1|do_1,$$

这也可以直接将 $\chi=2\theta_1$ 代入(1)得到(根据(17.9)).

对于初始静止的球总是有 $\chi=\pi-2\theta_2$,代入(1)可得

$$d\sigma_2=a^2|\cos\theta_2|do_2.$$

习题 2 在同样情况下,试将等效截面表示为散射质点损失能量 ε 的函数.

解: m_1 损失的能量等于 m_2 获得的能量.根据(17.5)和(17.7)有

$$\varepsilon=E_2'=\frac{2m_1^2m_2}{(m_1+m_2)^2}v_\infty^2\sin^2\frac{\chi}{2}=\varepsilon_{\max}\sin^2\frac{\chi}{2},$$

由此可得

$$d\varepsilon=\frac{1}{2}\varepsilon_{\max}\sin\chi d\chi,$$

再代入习题1的(1)可得

$$d\sigma=\pi a^2\frac{d\varepsilon}{\varepsilon_{\max}}.$$

在 ε 从零到 $\varepsilon_{\max}$ 区间内散射质点分布是均匀的.

习题 3　在场 $U \sim r^{-n}$ 内散射的等效截面对速度 v_∞ 依赖关系是什么?

解:根据(10.3),如果势能是 $k = -n$ 阶齐次函数,则对于类似的轨迹,$\rho \sim v^{-2/n}$ 或者

$$\rho = v_\infty^{-2/n} f(\chi)$$

(对于类似的轨迹,偏转角 χ 都相同).代入(18.6)得

$$\mathrm{d}\sigma \sim v_\infty^{-4/n} \mathrm{d}o.$$

习题 4　试求"落"向场 $U = -\alpha/r^2$ 中心质点的等效截面.

解:满足条件 $2\alpha > m\rho^2 v_\infty^2$ 的质点才能"落"向中心(参见(14.11)),即瞄准距离不大于 $\rho_{\max} = \sqrt{2\alpha/mv_\infty^2}$.所以有

$$\sigma^2 = \pi\rho_{\max}^2 = \frac{2\pi\alpha}{mv_\infty^2}.$$

习题 5　同上题,但 $U = -\alpha/r^n (n>2, \alpha>0)$.

解:等效势能

$$U_{\text{eff}} = \frac{m\rho^2 v_\infty^2}{2r^2} - \frac{\alpha}{r^n}$$

依赖于 r 的关系如图 20 所示,其最大值为

$$(U_{\text{eff}})_{\max} \equiv U_0 = \frac{(n-2)\alpha}{2}\left(\frac{m\rho^2 v_\infty^2}{n\alpha}\right)^{\frac{n}{n-2}}.$$

落向场中心的质点满足 $U_0 < E$. 由 $U_0 = E$ 求出 $\rho_{\max}$后,可得

$$\sigma = \pi n(n-2)^{\frac{2-n}{n}}\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^{2/n}.$$

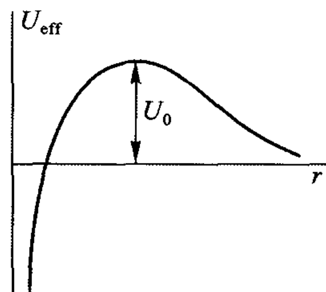


图 20

习题 6　质点(质量为 m_1)落向球体(质量为 m_2,半径为 R)表面,它们之间的引力符合牛顿定律,试求等效截面.

解:落到球面上的条件是 $r_{\min} < R$,其中 $r_{\min}$是质点轨迹上离球心最近的点. ρ 的最大可能值由条件 $r_{\min} = R$ 确定,这归结为求解方程 $U_{\text{eff}}(R) = E$ 或者

$$\frac{m_1 v_\infty^2 \rho_{\max}^2}{2R^2} - \frac{\alpha}{R} = \frac{m_1 v_\infty^2}{2},$$

并且 $\alpha = \gamma m_1 m_2$(γ 是引力常数),我们认为 $m_2 \gg m_1$,假设 $m \approx m_1$. 从上面方程中求得 $\rho_{\max}^2$,进而可得

$$\sigma = \pi R^2\left(1 + \frac{2\gamma m_2}{Rv_\infty^2}\right).$$

当 $v_\infty \to \infty$ 时,自然地,等效截面就趋向于球的几何截面.

习题 7　根据给定的等效截面对给定能量 E 的依赖关系，试求散射场的形式 $U(r)$. 假设 $U(r)$ 是 r 的单调减小函数(吸引场)，并且 $U(0)>E, U(\infty)=0$ (O.B.飞尔萨夫，1953).

解：对散射角 χ 积分

$$\int_{\chi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\chi}\mathrm{d}\chi = \pi\rho^2 \tag{1}$$

给出瞄准距离的平方，因此，函数 $\rho(\chi)$（以及 $\chi(\rho)$）也可以看作是已知的.

引入记号

$$s=\frac{1}{r},\quad x=\frac{1}{\rho^2},\quad w=\sqrt{1-\frac{U}{E}}. \tag{2}$$

公式(18.1)和(18.2)可写成

$$\frac{\pi-\chi(x)}{2}=\int_0^{s_0}\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{xw^2-s^2}}, \tag{3}$$

其中 s_0 是方程

$$xw^2(s_0)-s_0^2=0$$

的根.

方程(3)是函数 $w(s)$ 的积分方程，可以用类似于§12 中的方法求解. 将方程(3)两边除以 $\sqrt{\alpha-x}$，然后对 x 从零到 α 积分得

$$\begin{aligned}\int_0^{\alpha}\frac{\pi-\chi(x)}{2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\alpha-x}} &= \int_0^{\alpha}\int_0^{s_0(x)}\frac{\mathrm{d}s\mathrm{d}x}{\sqrt{(xw^2-s^2)(\alpha-x)}}\\ &= \int_0^{s_0(\alpha)}\int_{x(s_0)}^{\alpha}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}s}{\sqrt{(xw^2-s^2)(\alpha-x)}} = \pi\int_0^{s_0(\alpha)}\frac{\mathrm{d}s}{w},\end{aligned}$$

或者，将等式左边分部积分，

$$\pi\sqrt{\alpha}-\int_0^{\alpha}\sqrt{\alpha-x}\,\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \pi\int_0^{s_0(\alpha)}\frac{\mathrm{d}s}{w}.$$

将得到的关系式对 α 求导，再将 $s_0(\alpha)$ 简记为 s，并相应地将 α 替换为 s^2/w^2，可得

$$\pi\mathrm{d}\left(\frac{s}{w}\right)-\frac{1}{2}\mathrm{d}\left(\frac{s^2}{w^2}\right)\int_0^{s^2/w^2}\frac{\chi'(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{s^2}{w^2}-x}} = \frac{\pi}{w}\mathrm{d}s$$

或者

$$-\pi\,\mathrm{d}\ln w = \mathrm{d}\left(\frac{s}{w}\right)\int_0^{s^2/w^2}\frac{\chi'(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{s^2}{w^2}-x}}$$

这个方程可以直接积分，并且应该改变右边对 x 和 s/w 的积分顺序. 考虑到 $s=$

0(即 $r\to\infty$)时 $w=1$(即 $U=0$),变换回原始变量 r 和 ρ,最终得(两个等价形式)

$$w = \exp\left(\frac{1}{\pi}\int_{rw}^{\infty}\operatorname{arcosh}\frac{\rho}{rw}\cdot\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\rho}\mathrm{d}\rho\right)=\exp\left(-\frac{1}{\pi}\int_{rw}^{\infty}\frac{\chi(\rho)\mathrm{d}\rho}{\sqrt{\rho^2-r^2w^2}}\right). \tag{4}$$

对所有的 $r>r_{\min}$,即具有给定能量 E 的质点发生散射的可能区域内,这个公式确定了隐函数 $w(r)$(进而确定 $U(r)$).

§19 卢瑟福公式

前面所得公式的一个重要应用就是带电粒子在库仑场中的散射.

在公式(18.4)中令 $U=\alpha/r$ 并积分得

$$\varphi_0=\arccos\frac{\dfrac{\alpha}{mv_\infty^2\rho}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\alpha}{mv_\infty^2\rho}\right)^2}}$$

由此得

$$\rho^2=\frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4}\tan^2\varphi_0,$$

或者,根据(18.1),引入 $\varphi_0=(\pi-\chi)/2$,得

$$\rho^2=\frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4}\cot^2\frac{\chi}{2}. \tag{19.1}$$

将该等式对 χ 求导并代入(18.7)或者(18.8),得

$$\mathrm{d}\sigma=\pi\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2\frac{\cos\left(\dfrac{\chi}{2}\right)}{\sin^3\left(\dfrac{\chi}{2}\right)}\mathrm{d}\chi \tag{19.2}$$

或者

$$\mathrm{d}\sigma=\left(\frac{\alpha}{2mv_\infty^2}\right)^2\frac{\mathrm{d}o}{\sin^4\left(\dfrac{\chi}{2}\right)}. \tag{19.3}$$

这就是卢瑟福公式.需要指出的是,等效截面不依赖于 α 的符号,所得的结果对于库仑引力和斥力场都是一样的.

公式(19.3)给出碰撞质点的质心参考系中的等效截面.利用公式(17.4)可以变换到实验室参考系中.对于初始静止的质点,将 $\chi=\pi-2\theta_2$ 代入公式(19.2),可得

$$\mathrm{d}\sigma_2=2\pi\left(\frac{\alpha}{2mv_\infty^2}\right)^2\frac{\sin\theta_2}{\cos^3\theta_2}\mathrm{d}\theta_2=\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2\frac{\mathrm{d}o_2}{\cos^3\theta_2} \tag{19.4}$$

对于入射质点,这个变换在一般情况下非常复杂.我们只给出两种特殊情况.

如果散射质点的质量 m_2 远大于被散射质点的质量 m_1,则 $\chi \approx \theta_1$, $m \approx m_1$,故

$$d\sigma_1 = \left(\frac{\alpha}{4E_1}\right)^2 \frac{do_1}{\sin^4(\theta_1/2)}, \tag{19.5}$$

其中 $E_1 = m_1 v_\infty^2/2$ 是入射质点的能量.

如果两个质点的质量相等($m_1 = m_2$, $m = m_1/2$),则根据(17.9),$\chi = 2\theta_1$,代入(19.2)得

$$d\sigma_1 = 2\pi\left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \frac{\cos\theta_1}{\sin^3\theta_1} d\theta_1 = \left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \frac{\cos\theta_1}{\sin^4\theta_1} do_1. \tag{19.6}$$

如果两个质点不仅质量相等,而且是完全相同的质点,则散射后区分原来运动质点和原来静止质点就没有意义了.将 $d\sigma_1$ 和 $d\sigma_2$ 相加并将 θ_1 和 θ_1 统一写成 θ,可得对所有质点都相同的等效截面:

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \left(\frac{1}{\sin^4\theta} + \frac{1}{\cos^4\theta}\right)\cos\theta do. \tag{19.7}$$

我们重新回到一般公式(19.2),并利用它确定散射质点按其损失能量的分布.对于任意散射质点质量(m_2)和被散射质点质量(m_1),散射质点所获得的速度在质心参考系中用散射角表示为

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_\infty \sin\frac{\chi}{2}$$

(参见(17.5)).相应地,这个质点获得的能量就是质点 m_1 损失的能量,等于

$$\varepsilon = \frac{m_2 v_2'^2}{2} = \frac{2m^2}{m_2} v_\infty^2 \sin^2\frac{\chi}{2}.$$

由此将 $\sin(\chi/2)$ 用 ε 表示并代入(19.2),得

$$d\sigma = 2\pi \frac{\alpha^2}{m_2 v_\infty^2} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2}. \tag{19.8}$$

这个公式确定了等效截面对损失能量 ε 的依赖关系,损失能量的取值范围从零到 $\varepsilon_{max} = 2m^2 v_\infty^2/m_2$.

习　题

习题 1　试求在场 $U = \alpha/r^2 (\alpha > 0)$ 中散射等效截面.

解:偏转角:

$$\chi = \pi\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 2\alpha/(m\rho^2 v_\infty^2)}}\right].$$

等效截面

$$d\sigma=\frac{2\pi^2\alpha}{mv_\infty^2}\frac{\pi-\chi}{\chi^2(2\pi-\chi)^2}\frac{do}{\sin\chi}.$$

习题 2　试求被半径为 a 深度为 U_0 的球形势能阱(即当 $r>a$ 时 $U=0$,当 $r<a$ 时 $U=-U_0$)散射的等效截面.

解:质点进入和离开势能阱时,其直线轨迹被“折射”.根据§7 习题,入射角 α 和折射角 β(图 21)的关系为

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=n,\quad n=\sqrt{1+\frac{2U_0}{mv_\infty^2}}.$$

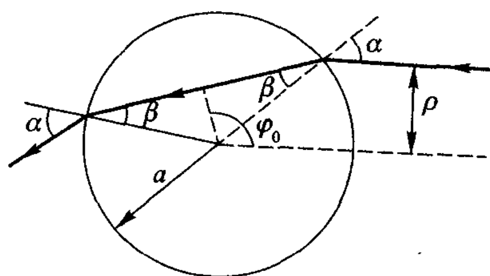


图 21

偏转角 $\chi=2(\alpha-\beta)$.所以有

$$\frac{\sin(\alpha-\chi/2)}{\sin\alpha}=\cos\frac{\chi}{2}-\cot\alpha\sin\frac{\chi}{2}=\frac{1}{n}.$$

从该方程中消去 α,由图显然有

$$a\sin\alpha=\rho$$

可得 ρ 和 χ 的关系如下:

$$\rho^2=a^2\frac{n^2\sin^2\left(\frac{\chi}{2}\right)}{n^2+1-2n\cos\left(\frac{\chi}{2}\right)}.$$

最后,对这个等式求微分可得等效截面

$$d\sigma=\frac{a^2n^2}{4\cos\left(\frac{\chi}{2}\right)}\frac{\left[n\cos\left(\frac{\chi}{2}\right)-1\right]\left[n-\cos\left(\frac{\chi}{2}\right)\right]}{\left[1+n^2-2n\cos\left(\frac{\chi}{2}\right)\right]^2}do.$$

角 χ 取值范围从零(当 $\rho=0$ 时)到下式确定的 χ_{max}(当 $\rho=a$ 时):

$$\cos\left(\frac{\chi_{max}}{2}\right)=\frac{1}{n}.$$

在锥 $\chi<\chi_{max}$ 内全部角度对 σ 积分可得全等效截面,显然,就等于几何截面 πa^2.

§20 小角度散射

如果所研究散射的瞄准距离很大，场 U 很弱使得偏转角很小，则等效截面的计算非常简单．这时可以直接在实验室参考系中计算，不必引入质心参考系．

我们取 x 轴沿着散射质点(质量为 m_1)初始动量的方向，而 xy 平面为散射平面．用 $\boldsymbol{p}_1'$ 表示散射后质点的动量，显然有

$$\sin\theta_1 = \frac{p_{1y}'}{p_1'}.$$

对于小偏转角，可以近似地用 θ_1 代替 $\sin\theta_1$，在分母中将 p_1' 代以初始动量 $p_1 = m_1 v_\infty$：

$$\theta_1 \approx p_{1y}'/(m_1 v_\infty) \tag{20.1}$$

由于 $\dot{p}_y = F_y$，故 y 轴方向动量增量为

$$p_{1y}' = \int_{-\infty}^{\infty} F_y \mathrm{d}t \tag{20.2}$$

这时，力

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\frac{y}{r}.$$

因为积分(20.2)已经包含小量 U，所以计算中可以近似地认为，质点没有偏离初始路径，即质点等速(速度为 v_∞)直线(沿着直线 $y=\rho$)运动．相应地，在(20.2)中假设

$$F_y = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\frac{\rho}{r}, \quad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{v_\infty}$$

可得

$$p_{1y}' = -\frac{\rho}{v_\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}x}{r}.$$

我们将对 x 的积分变换为对 r 的积分．由于对直线轨迹有 $r^2 = x^2 + y^2$，故当 x 从 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 时，r 从 ∞ 变到 ρ 再变回到 ∞．所以对 x 的积分变为两倍的对 r 从 ρ 到 ∞ 的积分，并且 $\mathrm{d}x$ 变为：

$$\mathrm{d}x = \frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2-\rho^2}}.$$

最后得散射角(20.1)的表达式如下：①

---

① 如果在质心参考系中推导，则我们会得到对于 χ 的同样表达式，但要将 m_1 代以 m．这是因为，根据(17.4)，小角度 θ_1 和 χ 应满足关系：

$$\theta_1 = \frac{m_2\chi}{m_1+m_2}.$$

$$\theta_1 = -\frac{2\rho}{m_1 v_\infty^2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2-\rho^2}}. \tag{20.3}$$

此式给定小偏转角情况下 θ_1 对 ρ 的依赖关系.散射等效截面(在实验室参考系中)的公式类似于(18.8)(用 θ_1 代替 χ),并且将 $\sin\theta_1$ 代以 θ_1:

$$\mathrm{d}\sigma = \left|\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta_1}\right|\frac{\rho(\theta_1)}{\theta_1}\mathrm{d}o_1. \tag{20.4}$$

习 题

习题 1 试从公式(18.4)推导公式(20.3).

解:为了避免下面推导中出现伪发散积分,将公式(18.4)写成下面形式:

$$\varphi_0 = -\frac{\partial}{\partial\rho}\int_{r_{\min}}^R \sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}-\frac{2U}{mv_\infty^2}}\mathrm{d}r,$$

这里我们将很大的有限量 R 作为积分上限,是想以后令 $R\to\infty$. 由于 U 很小,我们将根号按 U 的幂次展开,用 ρ 近似代替 $r_{\min}$:

$$\varphi_0 = \int_\rho^R \frac{\rho\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}}} + \frac{\partial}{\partial\rho}\int_\rho^\infty \frac{U(r)\mathrm{d}r}{mv_\infty^2\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}}}.$$

取极限 $R\to\infty$ 后,第一个积分等于 $\pi/2$. 对第二个积分进行变换,可得表达式

$$\chi = \pi - 2\varphi_0 = 2\frac{\partial}{\partial\rho}\int_\rho^\infty \frac{\sqrt{r^2-\rho^2}}{mv_\infty^2}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r = -\frac{2\rho}{mv_\infty^2}\int_\rho^\infty \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2-\rho^2}}.$$

习题 2 试求在场 $U=\alpha/r^n\ (n>0)$ 内小角度散射的等效截面.

解:根据(20.3)有

$$\theta_1 = \frac{2\rho\alpha n}{m_1 v_\infty^2}\int_\rho^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^{n+1}\sqrt{r^2-\rho^2}}.$$

令 $\rho^2/r^2=u$,代入积分后得 B-欧拉积分,可由 Γ 函数表示为

$$\theta_1 = \frac{2\alpha\sqrt{\pi}}{m_1 v_\infty^2\rho^n}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

由此用 θ_1 表示 ρ 并代入(20.4)得

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{n}\left[\frac{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{\alpha}{m_1 v_\infty^2}\right]^{2/n}\theta_1^{-2(1+1/n)}\mathrm{d}o_1.$$

第五章

微振动

§ 21　一维自由振动

在稳定平衡位置附近运动是力学系统的一种非常普遍的运动类型，称为*微振动*.我们从最简单的情况开始研究这种运动，即系统只有一个自由度.

稳定平衡位置是指势能取极小值的位置，偏离该位置会导致产生力 $-\mathrm{d}U/\mathrm{d}q$，从而使系统返回平衡位置.我们用 q_0 表示其相应的广义坐标值.在偏离平衡位置很小的情况下，在 $U(q)-U(q_0)$ 按 $q-q_0$ 展开的表达式中保留第一个非零项就足够了.一般情况下这是二阶项

$$U(q)-U(q_0)\approx\frac{k}{2}(q-q_0)^2,$$

其中 k 为正数(是二阶导数 $U''(q)$ 在 $q=q_0$ 处的值).今后我们从势能的最小值开始计算势能(即假设 $U(q_0)=0$)，并引入记号

$$x=q-q_0 \tag{21.1}$$

表示偏离平衡位置的坐标.于是有

$$U(x)=\frac{kx^2}{2}. \tag{21.2}$$

单自由度系统的动能一般可以写成

$$\frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2=\frac{1}{2}a(q)\dot{x}^2.$$

在同样的近似下函数 $a(q)$ 可以用它在 $q=q_0$ 处的值代替.引入记号①

① 需要强调的是，只有当 x 是笛卡儿坐标时 m 才是质量.

$$a(q_0)=m,$$

最后可得一维振动系统①的拉格朗日函数表达式如下：

$$L=\frac{m\dot{x}^2}{2}-\frac{kx^2}{2}. \tag{21.3}$$

相应的运动方程为

$$m\ddot{x}+kx=0, \tag{21.4}$$

或者

$$\ddot{x}+\omega^2x=0, \tag{21.5}$$

这里引入了记号

$$\omega=\sqrt{k/m}. \tag{21.6}$$

线性微分方程(21.5)的两个线性无关的解为：$\cos\omega t$ 和 $\sin\omega t$，因此方程的通解为

$$x=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t. \tag{21.7}$$

这个表达式可以写成

$$x=a\cos(\omega t+\alpha). \tag{21.8}$$

因为 $\cos(\omega t+\alpha)=\cos\omega t\cos\alpha-\sin\omega t\sin\alpha$，比较(21.7)可得任意常数 a 和 α 与常数 c_1 和 c_2 的关系：

$$a=\sqrt{c_1^2+c_2^2},\quad \tan\alpha=-c_2/c_1. \tag{21.9}$$

于是，系统在稳定平衡位置附近的运动是简谐振动.(21.8)中周期因子前面的系数 a 称为振幅，而余弦辐角称为振动的相位，α 是相位的初始值，显然依赖于初始时间的选择.物理量 ω 称为振动的循环频率，或者简称频率，今后我们就用这个简称.

频率是振动的基本特征量，不依赖于运动初始条件.根据公式(21.6)，它完全由力学系统本身的性质决定.但是应该指出，这个特点与小幅振动假设相关，对于大幅振动不成立.从数学角度看，它与势能是坐标的二次函数有关.②

微振动系统的能量为

$$E=\frac{m\dot{x}^2}{2}+\frac{kx^2}{2}=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\omega^2x^2),$$

或者，将(21.8)代入此式得

$$E=\frac{1}{2}m\omega^2a^2. \tag{21.10}$$

这与振幅平方成正比.

---

① 这样的系统常称为一维振子.

② 因此，如果函数 $U(x)$ 在 $x=0$ 处取数量级更高的极小值，即 $U\propto x^n$，$n>2$(参见 § 11 的习题 2a)，则没有这个性质.

振动系统坐标对时间的依赖关系经常写成复数表达式的实部形式：

$$x=\mathrm{Re}\{A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\},\tag{21.11}$$

其中 A 是复常数，写成下面形式：

$$A=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha},\tag{21.12}$$

则我们又回到(21.8)式了．常数 A 称为复振幅，它的模就是通常的振幅，而辐角就是初始相位．

在数学上，指数函数运算比三角函数运算简单，因为指数函数的微分不改变形式．当我们进行线性运算时(加法、数乘、微分和积分)，一般可以不写出取实部的记号，只需对最后的计算结果取实部．

习　题

习题 1　试用坐标和速度的初始值 x_0 和 v_0 表示振幅和初始相位．

答：

$$a=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}},\qquad \tan\alpha=-\frac{v_0}{\omega x_0}.$$

习题 2　试求由不同同位素原子组成的两个双原子分子的振动频率 ω 和 ω' 之间的关系，假设原子的质量分别等于 m_1,m_2 和 m_1',m_2'．

解：因为同位素原子相互作用的形式相同，故 $k=k'$．在分子动能中起系数 m 作用的是折合质量．根据(21.6)有

$$\frac{\omega'}{\omega}=\sqrt{\frac{m_1m_2(m_1'+m_2')}{m_1'm_2'(m_1+m_2)}}.$$

习题 3　设质量为 m 的质点沿着直线运动，弹簧一端连在质点上，另一端固定于 A 点(图 22)．A 点到直线的距离为 l，弹簧长度为 l 时受力为 F，试求振动频率．

解：弹簧势能等于力 F 乘以弹簧伸长量 δl (精确到更高阶小量)．当 $x\ll l$ 时，有

$$\delta l=\sqrt{l^2+x^2}-l\approx x^2/(2l),$$

因此，$U=Fx^2/(2l)$．因为动能为 $m\dot{x}^2/2$，故

$$\omega=\sqrt{\frac{F}{ml}}.$$

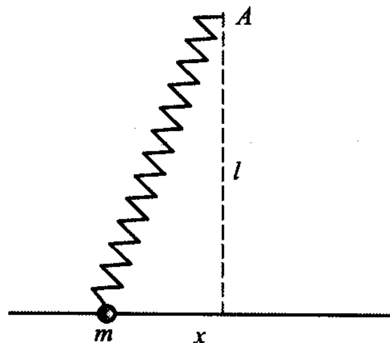


图 22

习题 4　同上题，质量为 m 的质点沿着半径为 r 的圆运动(图 23)．

解：在这种情况下，弹簧伸长量为(在 $\varphi\ll1$ 时)

$$\delta l = \sqrt{r^2 + (l+r)^2 - 2r(l+r)\cos\varphi} - l \approx \frac{r(l+r)}{2l}\varphi^2.$$

动能为 $T = (1/2)mr^2\dot{\varphi}^2$. 由此得频率:

$$\omega = \sqrt{\frac{F(r+l)}{rlm}}.$$

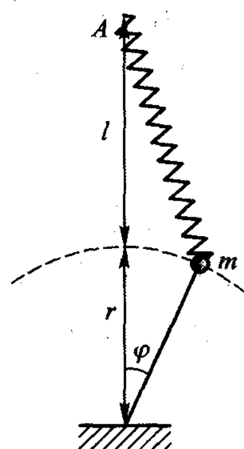


图 23

习题 5 试求图 2 的单摆的频率,悬挂点(质量为 m_1)可沿着水平方向运动.

解:当 $\varphi \ll 1$ 时,由 § 14 所得公式有

$$T = \frac{m_1 m_2 l^2}{2(m_1 + m_2)}\dot{\varphi}^2, \qquad U = \frac{m_2 gl}{2}\varphi^2.$$

由此得

$$\omega = \sqrt{\frac{g(m_1 + m_2)}{m_1 l}}.$$

习题 6 设质点沿着某曲线(在重力场中)振动的频率不依赖于振幅,试求该曲线的现状.

解:如果质点沿着曲线运动的势能为 $U = ks^2/2$,其中 s 为从平衡位置算起的弧长,则该曲线能满足要求.这时动能为 $T = m\dot{s}^2/2$(m 为质点的质量),振动频率为 $\omega = \sqrt{k/m}$,不依赖于 s 的初始值.

但在重力场中 $U = mgy$,其中 y 是纵坐标.所以有 $ks^2/2 = mgy$ 或者

$$y = \frac{\omega^2}{2g}s^2.$$

另一方面,$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$,由此得

$$x = \int\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y}\right)^2 - 1}\,\mathrm{d}y = \int\sqrt{\frac{g}{2\omega^2 y} - 1}\,\mathrm{d}y.$$

作代换

$$y = \frac{g}{4\omega^2}(1 - \cos\xi)$$

后,很容易积分得

$$x = \frac{g}{4\omega^2}(\xi + \sin\xi).$$

这两个等式给出了所求曲线的参数方程,这是一条螺旋线.

§ 22 强迫振动

现在我们研究可变外力场作用下系统的振动,这种振动称为强迫振动,以区别于前一节研究的自由振动.因为前面假设振动很小,当然也要假设外力场足够弱,否则它会引起过大的位移 x.

这种情况下,除了固有势能$(1/2)kx^2$以外,还有与外力场作用相关的势能$U_e(x,t)$.将这个附加势能按小量x展开,得

$$U_e(x,t)\approx U_e(0,t)+x\left.\frac{\partial U_e}{\partial x}\right|_{x=0}.$$

第一项只是时间的函数,可以从拉格朗日函数中略去(作为另一个函数对时间的全导数).第二项中$-\partial U_e/\partial x$是外力,作用于处在平衡位置的系统上,是时间的给定函数,用$F(t)$表示.于是势能中出现了$-xF(t)$项,所以系统的拉格朗日函数为

$$L=\frac{m\dot{x}^2}{2}-\frac{kx^2}{2}+xF(t). \tag{22.1}$$

相应的运动方程为

$$m\ddot{x}+kx=F(t),$$

或者

$$\ddot{x}+\omega^2x=\frac{1}{m}F(t), \tag{22.2}$$

这里我们再次引入了自由振动频率ω.

众所周知,非齐次常系数线性微分方程的通解为两项之和:$x=x_0+x_1$,其中x_0是齐次方程的通解,x_1是非齐次方程的特解.在这种情况下,x_0就是前一节研究的自由振动.

我们来看一种特别有意义的情况,强迫力是简单的频率为γ的时间周期函数,即

$$F(t)=f\cos(\gamma t+\beta). \tag{22.3}$$

方程(22.2)的特解形式为$x_1=b\cos(\gamma t+\beta)$,它具有与强迫力同样的周期.代入方程可得:$b=f/[m(\omega^2-\gamma^2)]$,加上齐次方程的解,有通解

$$x=a\cos(\omega t+\alpha)+\frac{f}{m(\omega^2-\gamma^2)}\cos(\gamma t+\beta). \tag{22.4}$$

任意积分常数a和α由初始条件确定.

于是,在周期性强迫力作用下,系统的运动是两项振动之和,两个振动的频率分别为ω和γ.

解(22.4)不适用于所谓的共振情况,即强迫力频率与固有频率重合.为了求这种情况下方程的通解,将(22.4)写成如下形式,其中常数表示的含义有所改变:

$$x=a\cos(\omega t+\alpha)+\frac{f}{m(\omega^2-\gamma^2)}[\cos(\gamma t+\beta)-\cos(\omega t+\beta)].$$

当$\gamma\to\omega$时,第二项变为0/0的不确定形式.按照洛必达法则可得

$$x = a\cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{2m\omega}t\sin(\omega t + \beta). \tag{22.5}$$

于是,在共振情况下,振幅随时间线性增大(直到不再是小量,上述所有理论都不适用为止).

我们再来研究共振附近的微振动,即 $\gamma = \omega + \varepsilon$,其中 ε 是小量.我们将通解写成复数形式

$$x = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + B\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega+\varepsilon)t} = (A + B\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon t})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}. \tag{22.6}$$

因为 $A + B\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon t}$ 在乘子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 的周期 $2\pi/\omega$ 内变化很小,所以共振附近的运动可以看作是微振动,但振幅是变化的.[①]

用 C 表示振幅,有

$$C = |A + B\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon t}|.$$

将 A 和 B 表示为 $a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ 和 $b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$,可得

$$C^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\varepsilon t + \beta - \alpha). \tag{22.7}$$

于是,振幅以频率 ε 周期变化,其变化范围是

$$|a - b| \leqslant C \leqslant a + b.$$

这种现象称为拍.

对任意强迫力 $F(t)$,方程(22.2)可积.这很容易做到,只要将方程预先写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x} + \mathrm{i}\omega x) - \mathrm{i}\omega(\dot{x} + \mathrm{i}\omega x) = \frac{1}{m}F(t)$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} - \mathrm{i}\omega\xi = \frac{1}{m}F(t), \tag{22.8}$$

这里引入了复变量

$$\xi = \dot{x} + \mathrm{i}\omega x. \tag{22.9}$$

方程(22.8)不是二阶,而是一阶.如果没有右边部分,它的解是 $\xi = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$,其中 A 是常数.我们寻找非齐次方程形式为 $\xi = A(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 的解,对于函数 $A(t)$ 可得方程

$$\dot{A}(t) = \frac{1}{m}F(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}.$$

积分后,可得方程(22.8)的解

$$\xi = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\left[\int_0^t \frac{1}{m}F(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t + \xi_0\right], \tag{22.10}$$

其中选择积分常数 ξ_0 使得 $t = 0$ 时 ξ 的值为零.这就是需要寻找的通解,函数 $x(t)$ 由(22.10)的虚部给出(除以 ω).[②]

---

① 振动相位中的"常数"项也要变化.

② 当然,这时力 $F(t)$ 应该写成实数形式.

强迫振动系统的能量显然是不守恒的,系统靠外力获得能量.假设初始能量为零,我们来求在外力作用时间内(从 $-\infty$ 到 $+\infty$)系统获得的能量.根据公式(22.10)(积分下限用 $-\infty$ 代替零,并且 $\xi(-\infty)=0$),在 $t\to\infty$ 情况下有

$$|\xi(\infty)|^2 = \frac{1}{m^2}\left|\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\right|^2.$$

另一方面,系统的能量表达式为

$$E=\frac{m}{2}(\dot{x}+\omega^2x^2)=\frac{m}{2}|\xi|^2. \tag{22.11}$$

将 $|\xi(\infty)|^2$ 代入此式,可得所要求的能量

$$E = \frac{1}{2m}\left|\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\right|^2. \tag{22.12}$$

这取决于力 $F(t)$的傅里叶分量模的平方,该力的频率等于系统特征频率.

特别地,如果外力作用时间很短(与 $1/\omega$ 相比很小),则可以令 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\approx1$.于是有

$$E = \frac{1}{2m}\left(\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\mathrm{d}t\right)^2.$$

这个结果是显然的,它表明短时间的力给系统提供冲量 $\int F\mathrm{d}t$,但来不及使系统产生显著的位移.

习　题

习题1　如果初始时刻 $t=0$ 系统静止在平衡位置($x=\dot{x}=0$),试求系统在外力 $F(t)$作用下的强迫振动.

a) $F=\mathrm{const}=F_0$.

答:$x=\dfrac{F_0}{m\omega^2}(1-\cos\omega t)$,常力作用结果是使振动系统平衡位置产生位移.

b) $F=at$.

答:$x=\dfrac{a}{m\omega^3}(\omega t-\sin\omega t)$.

c) $F=F_0^{-\alpha t}$.

答:$x=\dfrac{F_0}{m(\omega^2+\alpha^2)}\left(\mathrm{e}^{-\alpha t}-\cos\omega t+\dfrac{\alpha}{\omega}\sin\omega t\right)$.

d) $F=F_0\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\beta t$.

答:

$$x=\frac{F_0}{m[(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2]}\{-(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)\cos\omega t+$$

$$\frac{\alpha}{\omega}(\omega^2+\alpha^2+\beta^2)\sin\omega t+\mathrm{e}^{-\alpha t}[(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)\cos\beta t-2\alpha\beta\sin\beta t]\}$$

(在求解过程中将力写成复数形式 $F=F_0\mathrm{e}^{(-\alpha+\mathrm{i}\beta)t}$ 比较方便).

习题 2 设 $t=0$ 时系统静止在平衡位置,力 F 的变化规律为:当 $t<0$ 时 $F=0$,当 $0<t<T$ 时 $F=F_0t/T$,当 $t>T$ 时 $F=F_0$(图 24).试求在该力作用后系统振动的最后振幅.

解:在时间间隔 $0<t<T$ 内满足初始条件的振动为

$$x=\frac{F_0}{mT\omega^3}(\omega t-\sin\omega t).$$

图 24

当 $t>T$ 时我们求下面形式的解:

$$x=c_1\cos[\omega(t-T)]+c_2\sin[\omega(t-T)]+\frac{F_0}{m\omega^2}.$$

由 x 和 $\dot{x}$ 在 $t=T$ 处连续的条件,可求出

$$c_1=-\frac{F_0}{mT\omega^3}\sin\omega T,\quad c_2=\frac{F_0}{mT\omega^3}(1-\cos\omega T).$$

这样得振幅

$$a=\sqrt{c_1{}^2+c_2{}^2}=\frac{F_0}{mT\omega^3}\sin\frac{\omega T}{2}.$$

可见,力 F_0 加入越晚(即 T 越大),这个振幅越小.

习题 3 同上题,力 F_0 是常数,只在有限时间间隔 T 内作用(图 25).

解:可以像习题 2 那样求解,但利用公式(22.10)更简单.当 $t>T$ 时系统在平衡位置 $x=0$ 处自由振动,有

$$\xi=\frac{F_0}{m}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\int_0^T\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\,t=\frac{F_0}{\mathrm{i}\omega m}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega T})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}.$$

根据公式 $|\xi|^2=a^2\omega^2$,由 ξ 模的平方给出振幅.于是求得

$$a=\frac{2F_0}{m\omega^2}\sin\frac{\omega T}{2}.$$

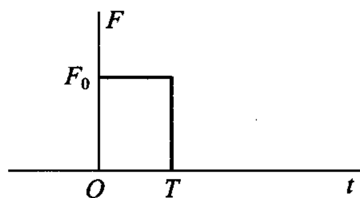


图 25

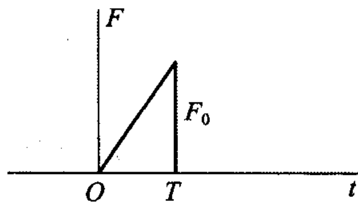


图 26

习题 4 同上题,但力在从零到 T 时间间隔内按规律 $F=F_0t/T$ 作用(图 26).

解：用同样方法可求得

$$a=\frac{F_0}{Tm\omega^3}\sqrt{\omega^2T^2-2\omega T\sin\omega T+2(1-\cos\omega T)}.$$

习题 5　同上题，但力在从零到 $T=2\pi/\omega$ 时间间隔内按规律 $F=F_0\sin\omega t$ 作用(图 27).

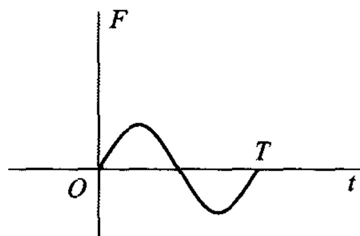


图 27

解：将

$$F(t)=F_0\sin\omega t=\frac{F_0}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})$$

代入公式(22.10)并从零到 T 积分，可得

$$a=\frac{F_0\pi}{m\omega^2}.$$

§23　多自由度系统振动

多自由度(s)系统振动理论类似于§21 的一维振动.

设系统的势能 U 是广义坐标 $q_i(i=1,2,\cdots,s)$的函数，在 $q_i=q_{i0}$处取极小值.引入小位移

$$x_i=q_i-q_{i0},\tag{23.1}$$

并按它展开 U，精确到二阶，可得势能为正定二次型

$$U=\frac{1}{2}\sum_{i,k}k_{ik}x_ix_k,\tag{23.2}$$

这里势能以其极小值为计算起点.由于 k_{ik}和 k_{ki}都是 x_ix_k 的系数，故可以认为它们对下标是对称的：

$$k_{ik}=k_{ki}.$$

动能的一般形式为(参见(5.5))

$$\frac{1}{2}\sum_{i,k}a_{ik}(q)\dot{q}_i\dot{q}_k,$$

假设 $q_i=q_{i0}$，用 m_{ik}表示 $a_{ik}(q_0)$，可得动能为正定二次型

$$\frac{1}{2}\sum_{i,k}m_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k.\tag{23.3}$$

可以认为 m_{ik}对下标是对称的：

$$m_{ik}=m_{ki}.$$

于是，自由微振动系统的拉格朗日函数为

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i,k}(m_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k-k_{ik}x_ix_k).\tag{23.4}$$

下面建立运动方程.为了确定包含方程中的微分，我们写出拉格朗日函数的全微分：

$$dL = \frac{1}{2}\sum_{i,k}(m_{ik}\dot{x}_i d\dot{x}_k + m_{ik}\dot{x}_k d\dot{x}_i - k_{ik}x_i dx_k - k_{ik}x_k dx_i).$$

既然上面和之值不依赖于求和指标的名称,我们可以将括号中第一和第三项的 i 和 k 相互交换,考虑到系数 m_{ik} 和 k_{ik} 的对称性,得

$$dL = \sum_{i,k}(m_{ik}\dot{x}_k d\dot{x}_i - k_{ik}x_k dx_i).$$

由此可见,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \sum_k m_{ik}\dot{x}_k, \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = -\sum_k k_{ik}x_k.$$

所以拉格朗日方程为

$$\sum_k m_{ik}\ddot{x}_k + \sum_k k_{ik}x_k = 0. \tag{23.5}$$

这是 $s(i=1,2,\cdots,s)$ 个常系数线性微分方程.

按照这些方程解的一般规律,我们寻找下面形式的 s 个未知函数:

$$x_k = A_k e^{i\omega t}, \tag{23.6}$$

其中 A_k 是待定常数.将(23.6)代入方程组(23.5),约去 $e^{i\omega t}$,可得常数 A_k 满足的齐次线性代数方程组

$$\sum_k(-\omega^2 m_{ik} + k_{ik})A_k = 0. \tag{23.7}$$

为使该方程组有非零解,其行列式等于零:

$$|k_{ik} - \omega^2 m_{ik}| = 0. \tag{23.8}$$

方程(23.8)称为*特征方程*,是 ω^2 的 s 阶方程.在一般情况下,该方程有 s 个不同的正实根 $\omega_\alpha^2, \alpha=1,2,\cdots,s$(在特殊情况下,这些根中有些重合).这样求出的 ω_α 称为系统的*特征频率*.

从物理上早就可以看出,方程(23.8)的根为正实数.事实上,ω 有虚部就意味着,坐标 x_k 对时间的依赖关系(23.6)(以及速度 $\dot{x}_k$)中包含指数减小或指数增长的因子.但这是不可能的,否则会导致能量随时间变化,违背能量守恒定律.

也可以用数学方法证明上述结论.将(23.7)乘以 A_i^* 并对下标 i 求和,得

$$\sum_{i,k}(-\omega^2 m_{ik} + k_{ik})A_i^* A_k = 0,$$

由此得

$$\omega^2 = \frac{\sum k_{ik}A_i^* A_k}{\sum m_{ik}A_i^* A_k}.$$

由于系数 m_{ik} 和 k_{ik} 都是对称的,上式分子和分母中的二次型都是实数.事实上,

$$\Big(\sum_{i,k}k_{ik}A_i^* A_k\Big)^* = \sum_{i,k}k_{ik}A_i A_k^* = \sum_{i,k}k_{ki}A_i A_k^* = \sum_{i,k}k_{ik}A_k A_i^*.$$

它们是正的[①],因而 ω^2 也是正的.求得频率 ω_α 并代入(23.7)中每个方程,就可以求出相应的系数 A_k.如果特征方程所有的根 ω_α 各不相同,则系数 A_k 正比于(23.8)的子行列式 $\Delta_{k\alpha}$,其中 ω 用 ω_α 代替.微分方程(23.5)的特解有下面形式:

$$x_k = \Delta_{k\alpha} C_\alpha e^{i\omega_\alpha t},$$

其中 C_α 是任意常数(复数).

所有这 s 个特解求和,可给出通解.其实数部分写成

$$x_k = \mathrm{Re}\left\{\sum_{\alpha=1}^{s} \Delta_{k\alpha} C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}\right\} \equiv \sum_\alpha \Delta_{k\alpha}\Theta_\alpha, \tag{23.9}$$

这里我们引入了记号

$$\Theta_\alpha = \mathrm{Re}\left\{C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}\right\}. \tag{23.10}$$

于是,系统每个坐标随时间的变化都由 s 个简单振动 $\Theta_1, \Theta_2, \cdots, \Theta_s$ 合成,这些简单振动的振幅和相位都是任意的,但频率完全确定.

这自然会产生一个问题,可否选择广义坐标使得每个坐标都进行简单振动?通解(23.9)的形式给出了解决这个问题的途径.

事实上,将(23.9)的 s 个关系式看作是 s 个未知量 $\Theta_1, \Theta_2, \cdots, \Theta_s$ 的方程,求解后可以用 $x_1, x_2, \cdots, x_s$ 表示 $\Theta_1, \Theta_2, \cdots, \Theta_s$.因此 $\Theta_1, \Theta_2, \cdots, \Theta_s$ 可以看作新的广义坐标,这些坐标称为*简正坐标*(或者*主坐标*),相应的简单周期振动是系统的简正振动.

从简正坐标的定义可以看出,它满足方程

$$\ddot{\Theta}_\alpha + \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha = 0. \tag{23.11}$$

这就是说,用简正坐标表示的方程组由 s 个相互独立的方程构成.每个简正坐标的加速度仅依赖于该坐标,只需已知坐标和相应速度的初值,就可以完全确定坐标对时间的依赖关系.换句话说,系统的简正振动是完全独立的.

由上述可知,用简正坐标表示的拉格朗日函数可以分解为多项之和,每一项都对应于频率为 ω_α 的一维振动,即

$$L = \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2}\left(\dot{\Theta}_\alpha^{\ 2} - \omega_\alpha^{\ 2}\Theta_\alpha^{\ 2}\right), \tag{23.12}$$

其中 m_α 是正常数.从数学观点看,这意味着变换(23.9)将两个二次型(动能(23.3)和势能(23.2))同时变为对角形.

---

① 系数 k_{ik} 构成了正定二次型,从(23.2)中对实数变量的定义看,这是显然的.但如果将复数 A_k 写成 $a_k + ib_k$,则可得(注意到 k_{ik} 的对称性):

$$\sum_{i,k} k_{ik} A_i^* A_k = \sum_{i,k} k_{ik}(a_i - ib_i)(a_k + ib_k) = \sum_{i,k} k_{ik} a_i a_k + \sum_{i,k} k_{ik} b_i b_k,$$

即两个正定二次型的和.

通常可以选择简正坐标,使得在拉格朗日函数中速度平方的系数等于 1/2.为此,用下面等式确定简正坐标(我们用 Q_α 表示):

$$Q_\alpha = \sqrt{m_\alpha}\Theta_\alpha . \tag{23.13}$$

那么

$$L = \frac{1}{2}\sum_\alpha(\dot{Q}_\alpha{}^2 - \omega_\alpha{}^2 Q_\alpha{}^2).$$

当特征方程有重根时,上面叙述没有多少变化.运动方程的积分的一般形式(23.9)和(23.10)也是一样的(也同为 s 项),差别仅仅在于相应于重叠频率的系数 $\Delta_{k\alpha}$ 已不再是子行列式了,这种情况下这些子行列式等于零.①

一个重叠(或称退化)频率相应于几个简正坐标,这个频率就有几重,但是这些简正坐标的选择不是唯一的.既然同一个变换将动能和势能化为 $\sum\dot{Q}_\alpha^2$ 和 $\sum Q_\alpha^2$,对变换所得的简正坐标(对应同一个 ω_α),可以进行任意线性变换,只要保证其平方和不变即可.

对于在常外力场中一个质点的三维振动,求简正坐标非常简单.取笛卡儿坐标系的原点为势能 $U(x,y,z)$ 的极小值处,可得 x,y,z 的平方形式的势能,而动能

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

(m 为质点的质量)不依赖于坐标轴的选择.因此,适当旋转坐标系可将势能化为对角形.于是

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_1y^2 + k_1z^2), \tag{23.14}$$

且沿着 x,y,z 轴的振动是主振动,其频率分别为

$$\omega_1 = \sqrt{k_1/m},\quad \omega_2 = \sqrt{k_2/m},\quad \omega_3 = \sqrt{k_3/m}.$$

在有心力对称场($k_1 = k_2 = k_3 \equiv k$, $U = kr^2/2$)的特殊情况下,这三个频率重合(见习题 3).

利用简正坐标可以将多自由度强迫振动问题转化为单自由度强迫振动.考虑到作用在系统上的时变外力,拉格朗日函数为

$$L = L_0 + \sum_k F_k(t)x_k, \tag{23.15}$$

其中 L_0 是自由振动的拉格朗日函数.用简正坐标代替 x_k 可得

① 不存在复频率,否则违背能量守恒定律.由此显然可知,在通解中不可能出现包含时间的指数和幂次项.

$$L = \frac{1}{2}\sum_{\alpha}(\dot{Q}_{\alpha}^{2} - \omega_{\alpha}^{2}Q_{\alpha}^{2}) + \sum_{\alpha}f_{\alpha}(t)Q_{\alpha}, \tag{23.16}$$

其中引入了记号:

$$f_{\alpha}(t) = \sum_{k}F_{k}(t)\frac{\Delta_{k\alpha}}{\sqrt{m_{\alpha}}}.$$

相应的运动方程

$$\ddot{Q}_{\alpha} + \omega_{\alpha}^{2}Q_{\alpha} = f_{\alpha}(t) \tag{23.17}$$

只包含一个未知函数 $Q_{\alpha}(t)$.

习 题

习题 1 设两个自由度系统的拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^{2} + \dot{y}^{2}) - \frac{\omega_{0}^{2}}{2}(x^{2} + y^{2}) + \alpha xy$$

(两个同样的固有频率为 ω_0 的一维系统以作用 $-\alpha xy$ 相互联系起来),试求系统的振动.

解:运动方程为

$$\ddot{x} + \omega_{0}^{2}x = \alpha y, \quad \ddot{y} + \omega_{0}^{2}y = \alpha x.$$

将(23.6)代入可得

$$A_{x}(\omega_{0}^{2} - \omega^{2}) = \alpha A_{y}, \quad A_{y}(\omega_{0}^{2} - \omega^{2}) = \alpha A_{x}. \tag{1}$$

特征方程为

$$(\omega_{0}^{2} - \omega^{2})^{2} = \alpha^{2},$$

由此得

$$\omega_{1}^{2} = \omega_{0}^{2} - \alpha, \quad \omega_{2}^{2} = \omega_{0}^{2} + \alpha.$$

当 $\omega = \omega_1$ 时方程(1)给出 $A_x = A_y$,当 $\omega = \omega_2$ 时方程(1)给出 $A_x = -A_y$,所以

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_{1} + Q_{2}), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_{1} - Q_{2})$$

($1/\sqrt{2}$相应于正文中所讲的简正坐标的归一化系数).

当 $\alpha \ll \omega_0^2$ 时(两个系统相互联系很弱),有

$$\omega_{1} \approx \omega_{0} - \alpha/(2\omega_{0}), \quad \omega_{2} \approx \omega_{0} + \alpha/(2\omega_{0}).$$

在这种情况下 x 和 y 的变化还是两个频率接近的振动合成的,即具有频率为 $\omega_2 - \omega_1 = \alpha/\omega_0$ 的拍的性质(参见§22).当坐标 x 的振幅达到最大值时,坐标 y 的振幅达到最小值,反之亦然.

习题 2 试求平面双摆的微振动(见图 1).

解:对于微振动($\varphi_1 \ll 1, \varphi_2 \ll 1$),在§5 的习题 1 中得到的拉格朗日函数写

成

$$L=\frac{m_1+m_2}{2}l_1^2\dot{\varphi}_1^2+\frac{m_2}{2}l_2^2\dot{\varphi}_2^2+m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2-\frac{m_1+m_2}{2}gl_1\varphi_1^2-\frac{m_2}{2}gl_2\varphi_2^2.$$

运动方程为

$$(m_1+m_2)l_1\ddot{\varphi}_1+m_2l_2\ddot{\varphi}_2+(m_1+m_2)g\varphi_1=0,$$

$$l_1\ddot{\varphi}_1+l_2\ddot{\varphi}_2+g\varphi_2=0.$$

将(23.6)代入后可得

$$A_1(m_1+m_2)(g-l_1\omega^2)-A_2\omega^2m_2l_2=0,$$

$$-A_1l_1\omega^2+A_2(g-l_2\omega^2)=0.$$

特征方程的根为

$$\omega_{1,2}^2=\frac{g}{2m_1l_1l_2}\{(m_1+m_2)(l_1+l_2)\pm$$

$$\sqrt{(m_1+m_2)[(m_1+m_2)(l_1+l_2)^2-4m_1l_1l_2]}\}.$$

当 $m_1\to\infty$ 时,频率趋于极限值$\sqrt{g/l_1}$和$\sqrt{g/l_2}$,相应于两个单摆独立振动.

习题 3 试求质点在有心力场 $U=kr^2/2$ 中的运动轨迹(称为空间振子).

解:像所有有心力场一样,运动发生在一个平面内,我们取这个平面为 xy. 每个坐标的变化是频率均为 $\omega=\sqrt{k/m}$ 的简单振动:

$$x=a\cos(\omega t+\alpha),\quad y=b\cos(\omega t+\beta)$$

或者

$$x=a\cos\varphi,\quad y=b\cos(\varphi+\delta)=b\cos\delta\cos\varphi-b\sin\delta\sin\varphi,$$

其中引入了记号 $\varphi=\omega t+\alpha$, $\delta=\beta-\alpha$. 由此求出 $\sin\varphi$ 和 $\cos\varphi$ 并求它们的平方和,可得轨迹方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\delta=\sin^2\delta.$$

这是中心在坐标原点的椭圆①. 当 $\delta=0$ 或者 $\delta=\pi$ 时轨迹退化为直线段.

§ 24 分子振动

如果我们讨论相互作用质点组成的系统,不是处于外场中,则不是所有的自由度都具有振动特性. 分子就是一个典型的例子. 除了原子在分子内在平衡位置附近振动以外,分子整体还作平动和转动.

平动有 3 个自由度,一般情况下,转动也有同样的自由度,所以由 n 个原子组成的分子的$3n$个自由度中,有$3n-6$个相应于振动. 所有原子沿着直线排列

① 在 § 14 已经指出,在有心力场 $U=kr^2/2$ 中质点沿着封闭曲线运动.

属于特殊情况.既然绕这个直线的转动没有意义,这种情况下转动有 2 个自由度,因此振动有 $3n-5$ 个自由度.

在求解分子振动的力学问题时,最好先不考虑平动和转动自由度.

为了消除平动,可以认为分子的动量等于零.由于这个条件意味着分子的质心不运动,可以选择它的 3 个坐标为常数.设 $\boldsymbol{r}_a=\boldsymbol{r}_{a0}+\boldsymbol{u}_a$(其中 $\boldsymbol{r}_{a0}$是第 a 个原子静止平衡位置的径矢,而 $\boldsymbol{u}_a$ 是其偏离平衡位置的矢量),我们可将条件

$$\sum m_a\boldsymbol{r}_a = \text{const} \equiv \sum m_a\boldsymbol{r}_{a0}$$

表示为

$$\sum m_a\boldsymbol{u}_a = 0. \tag{24.1}$$

为了消除转动,应该令分子的动量矩等于零.因为动量矩不是坐标的任何函数对时间的全导数,所以,一般来讲,消除转动的条件不可能是哪个函数等于零的形式.然而,微振动恰好属于特例.事实上,再设 $\boldsymbol{r}_a=\boldsymbol{r}_{a0}+\boldsymbol{u}_a$,略去 $\boldsymbol{u}_a$ 的二阶小量,分子的动量矩为

$$\boldsymbol{M} = \sum m_a\boldsymbol{r}_a\times\boldsymbol{v}_a \approx \sum m_a\boldsymbol{r}_{a0}\times\dot{\boldsymbol{u}}_a = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum m_a\boldsymbol{r}_{a0}\times\boldsymbol{u}_a.$$

在这样的近似下,消除分子转动条件可以写成

$$\sum m_a\boldsymbol{r}_{a0}\times\boldsymbol{u}_a = 0 \tag{24.2}$$

(这时坐标原点可以任意选择).

分子简正振动可以根据原子运动特征分类,分类是基于(在平衡位置上的)原子在分子内对称分布的思想.为了实现这个目的,有基于群论的一般方法,这将在本教程的另一卷中讲述[①].这里我们讨论几个简单的例子.

如果分子的所有 n 个原子位于一个平面内,则可以区分原子的面内简正振动和面外简正振动.很容易确定两种振动的自由度.因为平面运动总共有 $2n$ 个自由度,从中去掉两个平动和一个转动,原子面内振动自由度为 $2n-3$.其余的 $(3n-6)-(2n-3)=n-3$ 自由度对应于面外振动.

在线性分子情况下,可以区分纵向振动和横向振动.因为 n 个质点沿着直线运动有 n 个自由度,从中去掉平动,则纵向振动自由度为 $n-1$.既然线性分子振动有 $3n-5$ 个自由度,则有 $2n-4$ 个横向振动自由度.然而,这些振动有 $n-2$ 个不同的频率,这是因为每个振动都可以独立发生在相互垂直的两个(通过分子轴的)平面内,由对称性可知每一对简正振动都有相同的频率.

---

① 见第三卷,《量子力学(非相对论理论)》,§100.

习 题[①]

习题 1 求线性3原子对称分子 ABA(图28)的振动频率.假设分子势能仅依赖于距离 $A-B$,$B-A$ 以及角 ABA.

解:根据(24.1),原子纵向位移 x_1,x_2,x_3 满足关系

$$m_A(x_1+x_3)+m_Bx_2=0.$$

利用此式,从分子纵向运动的拉格朗日函数

$$L=\frac{m_A}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{x}_3^2)+\frac{m_B}{2}\dot{x}_2^2-\frac{k_1}{2}[(x_1-x_2)^2+(x_3-x_2)^2]$$

中消去 x_2,然后引入新坐标

$$Q_a=x_1+x_3,\quad Q_s=x_1-x_3.$$

于是可得

$$L=\frac{m_A\mu}{4m_B}\dot{Q}_a^2+\frac{m_A}{4}\dot{Q}_s^2-\frac{k_1\mu^2}{4m_B^2}Q_a^2-\frac{k_1}{4}Q_s^2$$

($\mu=2m_A+m_B$ 是分子的质量).由此可见,Q_a 和 Q_s 是简正坐标(精确到相差归一化系数).坐标 Q_a 对应着相对分子中心的反对称振动($x_1=x_3$,图28a),其频率为

$$\omega_a=\sqrt{\frac{k_1\mu}{m_Am_B}}.$$

坐标 Q_s 对应着对称振动($x_1=-x_3$,图28b),频率为

$$\omega_{s1}=\sqrt{\frac{k_1}{m_A}}.$$

根据(24.1)和(24.2),原子横向位移 y_1,y_2,y_3 满足关系

$$m_A(y_1+y_3)+m_By_2=0,\quad y_1=y_3,$$

(对称弯曲振动,图28b).分子弯曲势能写成 $k_2l^2\delta^2/2$,其中 δ 是角 ABA 偏离 π 的大小,可以用位移表示为

$$\delta=\frac{1}{l}[(y_1-y_2)+(y_3-y_2)].$$

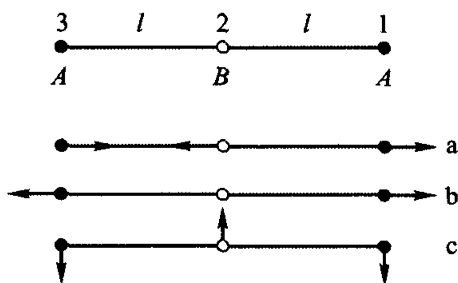


图 28

① 更复杂的分子振动计算可参见:М. В. Волькенштейн, М. А. Ельяшевич, Б. И. Степанов. Колебания молекул. – М.:Гостехиздат,1949;Г. Герцберг, Колебательные и вращательные спектры многоатомных молекул. – М.:ИЛ,1949.

将所有的位移 y_1, y_2, y_3 用 δ 表示，可得分子横向振动的拉格朗日函数

$$L=\frac{m_A}{2}(\dot{y}_1^2+\dot{y}_3^2)+\frac{m_B}{2}\dot{y}_2^2-\frac{k_2 l^2}{2}\delta^2=\frac{m_A m_B}{4\mu}l^2\dot{\delta}^2-\frac{k_2 l^2}{2}\delta^2,$$

由此得频率

$$\omega_{s2}=\sqrt{\frac{2k_2\mu}{m_A m_B}}.$$

习题 2 同上题，但分子 ABA 的形状为三角形(图 29).

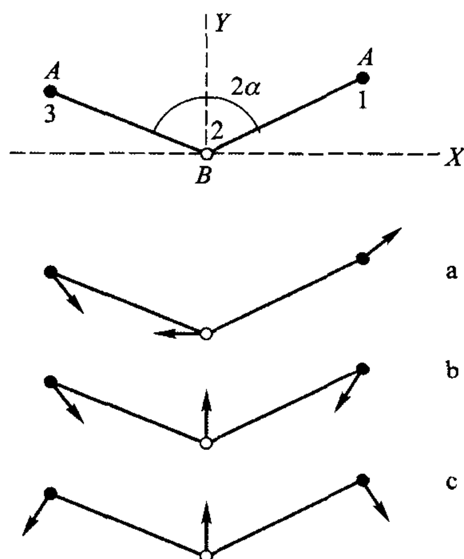


图 29

解：根据(24.1)和(24.2)，原子位移 $\boldsymbol{u}$ 在 X 和 Y 方向的分量满足关系

$$m_A(x_1+x_3)+m_B x_2=0,$$
$$m_A(y_1+y_3)+m_B y_2=0,$$
$$(y_1-y_3)\sin\alpha-(x_1+x_3)\cos\alpha=0.$$

利用矢量 $\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2$ 和 $\boldsymbol{u}_3-\boldsymbol{u}_2$ 在直线 AB 和 BA 方向上投影，可得距离 $A-B$ 和 $B-A$ 的变化量 δl_1 和 δl_2 如下

$$\delta l_1=(x_1-x_2)\sin\alpha+(y_1-y_2)\cos\alpha,$$
$$\delta l_2=-(x_3-x_2)\sin\alpha+(y_3-y_2)\cos\alpha.$$

将这两个矢量向垂直于直线 AB 和 BA 方向上投影，可得角 ABA 的改变量

$$\delta=\frac{1}{l}[(x_1-x_2)\cos\alpha-(y_1-y_2)\sin\alpha]+\frac{1}{l}[-(x_3-x_2)\cos\alpha-(y_3-y_2)\sin\alpha].$$

分子的拉格朗日函数为

$$L=\frac{m_A}{2}(\dot{\boldsymbol{u}}_1^2+\dot{\boldsymbol{u}}_3^2)+\frac{m_B}{2}\dot{\boldsymbol{u}}_2^2-\frac{k_1}{2}(\delta l_1^2+\delta l_2^2)-\frac{k_2 l^2}{2}\delta^2.$$

引入新坐标

$$Q_a = x_1 + x_3, \quad q_{s1} = x_1 - x_3, \quad q_{s2} = y_1 + y_3.$$

将矢量 $\boldsymbol{u}$ 的分量用这些新坐标表示

$$x_1 = \frac{1}{2}(Q_a + q_{s1}), \quad x_3 = \frac{1}{2}(Q_a - q_{s1}), \quad x_2 = -\frac{m_A}{m_B}Q_a,$$

$$y_1 = \frac{1}{2}(q_{s2} + Q_a \cot\alpha), \quad y_3 = \frac{1}{2}(q_{s2} - Q_a \cot\alpha), \quad y_2 = -\frac{m_A}{m_B}q_{s2},$$

计算后可得拉格朗日函数

$$L = \frac{m_A}{4}\left(\frac{2m_A}{m_B} + \frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\dot{Q}_a^2 + \frac{m_A}{4}\dot{q}_{s1}^2 + \frac{m_A\mu}{4m_B}\dot{q}_{s2}^2 -$$

$$Q_a^2\frac{k_1}{4}\left(\frac{2m_A}{m_B} + \frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\left(1 + \frac{2m_A}{m_B}\sin^2\alpha\right) - \frac{q_{s1}^2}{4}(k_1\sin^2\alpha + 2k_2\cos^2\alpha) -$$

$$q_{s2}^2\frac{\mu^2}{4m_B^2}(k_1\cos^2\alpha + 2k_2\sin^2\alpha) + q_{s1}q_{s2}\frac{\mu}{2m_B}(2k_2 - k_1)\sin\alpha\cos\alpha.$$

由此可见,坐标 Q_a 对应于频率为

$$\omega_a^2 = \frac{k_1}{m_A}\left(1 + \frac{2m_A}{m_B}\sin^2\alpha\right)$$

的相对于 Y 轴的反对称振动($x_1 = x_3, y_1 = -y_3$,图 29a).

坐标 q_{s1}, q_{s2} 对应于两个振动(相对 Y 轴对称:$x_1 = -x_3, y_1 = y_3$,图 29a 和 29b),其频率 ω_{s1}, ω_{s2} 是二次(ω^2)特征方程

$$\omega^4 - \omega^2\left[\frac{k_1}{m_A}\left(1 + \frac{2m_A}{m_B}\cos^2\alpha\right) + \frac{2k_2}{m_A}\left(1 + \frac{2m_A}{m_B}\sin^2\alpha\right)\right] + \frac{2\mu k_1 k_2}{m_B m_A^2} = 0$$

的根.当 $2\alpha = \pi$ 时,所有这些频率与习题 1 相同.

习题 3 同上题,但分子 ABC 非对称(图 30).

解:原子纵向位移(x)和横向位移(y)之间的关系为

$$m_A x_1 + m_B x_2 + m_C x_3 = 0,$$

$$m_A y_1 + m_B y_2 + m_C y_3 = 0,$$

$$m_A l_1 y_1 = m_C l_2 y_3.$$

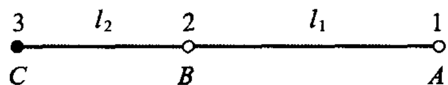


图 30

拉伸和弯曲势能为

$$\frac{k_1}{2}(\delta l_1)^2 + \frac{k_1'}{2}(\delta l_2)^2 + \frac{k_2 l^2}{2}\delta^2$$

$(2l = l_1 + l_2)$.类似习题 1,计算可得横向振动频率

$$\omega_t^2 = \frac{k_2 l^2}{l_1^2 l_2^2}\left(\frac{l_1^2}{m_C} + \frac{l_2^2}{m_A} + \frac{4l^2}{m_B}\right),$$

两个纵向振动频率 ω_{l1}, ω_{l2} 满足二次(ω^2)特征方程

$$\omega^4-\omega^2\left[k_1\left(\frac{1}{m_A}+\frac{1}{m_B}\right)+k_1'\left(\frac{1}{m_B}+\frac{1}{m_C}\right)\right]+\frac{\mu k_1 k_1'}{m_A m_B m_C}=0.$$

§ 25 阻尼振动

到现在为止,我们都是假设物体的运动发生在真空中或者介质对运动的影响可以忽略.实际上,物体在介质中运动时,介质会产生阻力使运动减慢.这时运动物体的能量最终转化为热量,或者说终将耗散.

在这种情况下运动过程已不再是纯力学过程,研究需要考虑介质的运动,以及物体和介质的内部热状态.特别是,一般情况下不能认为,运动物体的加速度仅仅是给定时刻的坐标和速度的函数,即不存在这种力学意义上的运动方程了.因此,在介质中的运动问题已经不是力学问题.

然而,存在一些情况,在介质中的运动可以近似地用力学方程描述,这需要在方程中引入补充项.如果振动频率小于在介质内耗散过程的频率,则属于这种情况.在这种情况下,可以认为在物体上作用了仅依赖于速度的*摩擦力*(对于均匀介质).

如果速度足够小,可以将摩擦力按速度的幂次展开.因为在静止物体上没有任何摩擦力作用,所以零次项为零.未消失的第一项与速度成正比.于是,作用在广义坐标为 x 的一维振动系统上的摩擦力 $f_{\text{тр}}$ 可以写成

$$f_{\text{тр}}=-\alpha\dot{x},$$

其中 α 为正的系数,负号表示力的方向与速度相反.将这个力补充到运动方程(见(21.4))的右端,可得

$$m\ddot{x}=-kx-\alpha\dot{x}. \tag{25.1}$$

除以 m 并引入记号

$$\frac{k}{m}=\omega_0^2,\quad \frac{\alpha}{m}=2\lambda. \tag{25.2}$$

ω_0^2 是没有摩擦力时系统自由振动的频率.λ 称为*阻尼系数*①.

于是,我们有方程

$$\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2x=0. \tag{25.3}$$

根据求解常系数线性微分方程的一般方法,假设 $x=e^{rt}$ 可得关于 r 的特征方程

$$r^2+2\lambda r+\omega_0^2=0.$$

方程(25.3)的通解为:

$$x=c_2e^{r_1t}+c_2e^{r_2t},\quad r_{1,2}=-\lambda\pm\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}.$$

① 无量纲乘积 λT(其中 $T=2\pi/\omega$ 是周期)称为*对数阻尼衰减量*.

下面分两种情况讨论.

如果 $\lambda < \omega_0$,则 r 有两个共轭复值.运动方程的通解可以写成

$$x = \mathrm{Re}\left\{A\exp\left(-\lambda t + \mathrm{i}t\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\right)\right\},$$

其中 A 是任意复常数.也可以写成

$$x = a\mathrm{e}^{-\lambda t}\cos(\omega t + \alpha), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}, \tag{25.4}$$

其中 a 和 α 是实常数.这些公式表示的运动称为*阻尼振动*.可以看作是振幅按指数规律衰减的简谐振动.振幅衰减速度由指数 λ 决定,振动"频率" ω 小于无阻尼时自由振动的频率.当 $\lambda \ll \omega_0$ 时,ω 和 ω_0 之间的差别是二阶小量.由于摩擦总是阻碍运动,故有阻尼时频率减小是显然的.

如果 $\lambda \ll \omega_0$,则在一个周期 $2\pi/\omega$ 之内阻尼振动的振幅几乎不变.这时研究坐标和速度的平均值(一个周期内)很有意义,取平均时忽略乘子 $\mathrm{e}^{-\lambda t}$ 的变化.所以系统的平均能量衰减规律为

$$\overline{E} = E_0\mathrm{e}^{-2\lambda t}, \tag{25.5}$$

其中 E_0 是能量的初值.

现在假设 $\lambda > \omega_0$.那么 r 的两个值都是实数,并且两个都是负数.通解可写成

$$x = c_1\exp\left[-\left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)t\right] + c_2\exp\left[-\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)t\right]. \tag{25.6}$$

可见,在这种阻尼足够大的情况下,运动 $|x|$ 单调递减,即趋近于平衡位置(当 $t\to\infty$ 时).这种类型的运动称为*非周期衰减*.

最后,在 $\lambda = \omega_0$ 的特殊情况下,特征方程总有一个根(重根)为 $r = -\lambda$.这时运动方程的通解为

$$x = (c_1 + c_2 t)\mathrm{e}^{-\lambda t}. \tag{25.7}$$

这是非周期衰减的特殊情况,仍具有振动性质.

对于多自由度系统,相应于广义坐标 x_i 的广义摩擦力是速度的线性函数

$$f_{i\text{тр}} = -\sum_k \alpha_{ik}\dot{x}_k. \tag{25.8}$$

从纯粹的力学角度考虑,无法得出系数 α_{ik} 对下标的对称性结论.用统计物理的方法可以证明①,

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}. \tag{25.9}$$

故公式(25.8)可以写成导数形式

$$f_{i\text{тр}} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}, \tag{25.10}$$

① 参见第五卷,《统计物理学 I》,§ 121.

其中二次型

$$F = \frac{1}{2}\sum_{i,k}\alpha_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k \tag{25.11}$$

称为耗散函数.

在拉格朗日方程的右端加入力(25.10),得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}. \tag{25.12}$$

耗散函数有重要的物理意义,它决定了系统中能量耗散的强度.这很容易证明,只要计算机械能对时间的导数即可.我们有

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i \dot{x}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L\right) = \sum_i \dot{x}_i\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i}\right) = -\sum_i \dot{x}_i\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}.$$

由于 F 是速度的二次函数,根据欧拉齐次函数定理,上式右端的和等于 $2F$.于是

$$\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = -2F, \tag{25.13}$$

即系统能量变化速度等于 2 倍耗散函数.因为耗散过程会导致能量减小,总是有 $F>0$,即二次型(25.11)是正定的.

将力(25.8)加入方程(23.5)的右端,可得存在阻尼时微振动方程

$$\sum_k m_{ik}\ddot{x}_k + \sum_k k_{ik}x_k = -\sum_k \alpha_{ik}\dot{x}_k. \tag{25.14}$$

在这些方程中令

$$x_k = A_k \mathrm{e}^{rt},$$

约去 e^{rt} 后可得常数 A_k 满足的线性代数方程组

$$\sum_k (m_{ik}r^2 + \alpha_{ik}r + k_{ik})A_k = 0. \tag{25.15}$$

令行列式等于零可得特征方程

$$|m_{ik}r^2 + \alpha_{ik}r + k_{ik}| = 0, \tag{25.16}$$

可求得 r.

这是 r 的 $2s$ 阶方程.因为所有系数都是实数,方程的根或者是实数,或者是成对复共轭.这时实根一定是负数,复根的实部一定是负的.否则坐标和速度以及系统的能量都会随着时间指数增加,但摩擦力应该使能量减小.

§26　有摩擦的强迫振动

研究有摩擦时的强迫振动类似于§22 研究无摩擦振动.我们详细研究非常有意义的周期强迫力情况.

在方程(25.1)的右端加入外力 $f\cos\gamma t$ 并除以 m,可得运动方程

$$\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2x=\frac{f}{m}\cos\gamma t. \tag{26.1}$$

求解这个方程用复数形式更方便，为此在右端用 $e^{i\gamma t}$ 代替 $\cos\gamma t$：

$$\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2x=\frac{f}{m}e^{i\gamma t}.$$

我们求 $x=Be^{i\gamma t}$ 形式的特解，对于 B 有

$$B=\frac{f}{m(\omega_0^2-\gamma^2+2i\lambda\gamma)}. \tag{26.2}$$

将 B 写成 $be^{i\delta}$ 的形式，对于 b 和 δ 有

$$b=\frac{f}{m\sqrt{(\omega_0^2-\gamma^2)^2+4\lambda^2\gamma^2}},\qquad \tan\delta=\frac{2\lambda\gamma}{\gamma^2-\omega_0^2}. \tag{26.3}$$

最后，将表达式 $Be^{i\gamma t}=be^{i(\gamma t+\delta)}$ 的实部分离出来，可得方程(26.1)的特解，再加上其相应的齐次方程的通解(我们给出 $\omega_0>\lambda$ 的情况)，最终得

$$x=ae^{-\lambda t}\cos(\omega t+\alpha)+b\cos(\gamma t+\delta). \tag{26.4}$$

第一项随时间指数衰减，经过足够长时间后只剩下第二项：

$$x=b\cos(\gamma t+\delta). \tag{26.5}$$

强迫振动的振幅 b 的表达式(26.3)在 γ 接近 ω_0 时也增大，但是不会像无阻尼共振那样趋向无穷. 对于给定的力幅值 f，在 $\gamma=\sqrt{\omega_0^2-2\lambda^2}$ 时振幅最大. 当 $\lambda\ll\omega_0$ 时，这个值与 ω_0 之差是二阶小量.

我们研究接近共振的区域. 设 $\gamma=\omega_0+\varepsilon$，其中 ε 是小量，我们又假设 $\lambda\ll\omega_0$. 那么在(26.2)中可以做近似替换

$$\gamma^2-\omega_0^2=(\gamma+\omega_0)(\gamma-\omega_0)\approx2\omega_0\varepsilon,\qquad 2i\lambda\gamma\approx2i\lambda\omega_0,$$

因此

$$B=-\frac{f}{2m(\varepsilon-i\lambda)\omega_0} \tag{26.6}$$

或者

$$b=\frac{f}{2m\omega_0\sqrt{\varepsilon^2+\lambda^2}},\qquad \tan\delta=\frac{\lambda}{\varepsilon}. \tag{26.7}$$

我们研究当强迫力频率改变时，振动与强迫力的相位差 δ 的变化特点. 这个差总是负的，即振动“落后”于外力. 远离共振时，如果 $\gamma<\omega_0$ 则 δ 趋于零，如果 $\gamma>\omega_0$ 则 δ 趋于 $-\pi$. 在接近 ω_0 的狭窄区域(宽度为 λ)内，δ 从零变化为 $-\pi$，当 $\gamma=\omega_0$ 时相位差为 $-\pi/2$. 我们发现，无摩擦时强迫振动相位在 $\gamma=\omega_0$ 时产生幅度为 π 的突变((22.4)的第二项改变符号)，阻尼“抹平”了这个突变.

当系统的强迫振动处于平稳运动(26.5)时，系统的能量保持不变. 这时系统不断(从外力源)吸收能量，又因摩擦而耗散掉. 我们用外力频率的函数 $I(\gamma)$ 表

示单位时间内平均吸收的能量.根据(25.13)有

$$I(\gamma)=2\bar{F},$$

其中 $\bar{F}$ 是耗散函数(对振动周期)的平均值.对于一维运动,耗散函数的表达式(25.11)写成 $F=\alpha\dot{x}^2=\lambda m\dot{x}^2$.将(26.5)代入得

$$F=\lambda mb^2\gamma^2\sin^2(\gamma t+\delta).$$

正弦的平方对时间的平均值为 1/2,所以

$$I(\gamma)=\lambda mb^2\gamma^2. \tag{26.8}$$

在共振附近,代入振幅(26.7)得

$$I(\varepsilon)=\frac{f^2}{4m}\frac{\lambda}{\varepsilon^2+\lambda^2}. \tag{26.9}$$

能量吸收对频率的这种依赖关系称为色散.在某个 ε 值时 $I(\varepsilon)$ 等于 $\varepsilon=0$ 时的一半,则 $|\varepsilon|$ 称为共振曲线(图 31)的半宽度.由公式(26.9)可知,这个宽度等于阻尼系数 λ.曲线最大值的高度

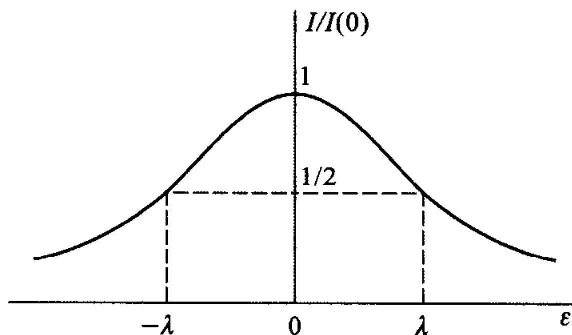


图 31

$$I(0)=\frac{f^2}{4m\lambda}$$

与 λ 成反比.因此,阻尼系数越小,共振曲线越高,即最大值更尖.但这时共振曲线下面的面积不变.

这个面积由积分

$$\int_0^{\infty}I(\gamma)\mathrm{d}\gamma=\int_{-\omega_0}^{\infty}I(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon$$

给出.因为 $I(\varepsilon)$ 在 $|\varepsilon|$ 增大时迅速减小,很大 $|\varepsilon|$ 的区域无关紧要,可以在积分时将 $I(\varepsilon)$ 写成(26.9)的形式,积分下限换为 $-\infty$.那么

$$\int_{-\infty}^{\infty}I(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon=\frac{f^2\lambda}{4m}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\varepsilon^2+\lambda^2}=\frac{\pi f^2}{4m}. \tag{26.10}$$

习 题

习题 试求外力 $f=f_0\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\gamma t$ 作用下有摩擦的强迫振动.

解:我们求解复数形式的运动方程

$$\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2x=\frac{f_0}{m}\mathrm{e}^{\alpha t+\mathrm{i}\gamma t},$$

然后分离解的实部.结果可得强迫振动

$$x=b\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\gamma t+\delta),$$

其中

$$b=\frac{f_0}{m\sqrt{(\omega_0^2+\alpha^2-\gamma^2+2\alpha\lambda)^2+4\gamma^2(\alpha+\lambda)^2}},\qquad \tan\delta=-\frac{2\gamma(\alpha+\lambda)}{\omega_0^2+\alpha^2-\gamma^2+2\alpha\lambda}.$$

§ 27 参数共振

存在一种非封闭振动系统,外力的作用可以归结为其参数随时间的变化[①].

拉格朗日函数(21.3)中的 m 和 k 就是一维系统的参数,如果它们依赖于时间,则运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{x})+kx=0. \tag{27.1}$$

用新自变量 τ 代替 t, $\mathrm{d}\tau=\mathrm{d}t/m(t)$,则方程变为

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2}+mkx=0.$$

因此,不失一般性,研究下面形式的方程就足够了

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2(t)x=0. \tag{27.2}$$

这个方程可以由(27.1)中令 $m=\text{const}$ 得到.

函数 $\omega(t)$ 的形式由问题的条件决定.假设这个函数是周期的,频率为 γ(周期为 $T=2\pi/\gamma$).这就是说,

$$\omega(t+T)=\omega(t),$$

因而方程(27.2)在变换 $t\to t+T$ 下保持不变.由此可知,如果 $x(t)$ 是方程的解,则函数 $x(t+T)$ 也是解.换句话说,如果 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 是方程(27.2)的两个独立的解,则变量替换 $t\to t+T$ 后这两个函数可以用原函数线性表示.这种情况下可以选择 x_1 和 x_2 使得变量替换 $t\to t+T$ 导致乘以常数[②]

$$x_1(t+T)=\mu_1x_1(t),\quad x_2(t+T)=\mu_2x_2(t).$$

具有这种性质的函数的一般形式为

$$x_1(t)=\mu_1^{t/T}\Pi_1(t),\qquad x_2(t)=\mu_2^{t/T}\Pi_2(t). \tag{27.3}$$

① 一个简单的例子是单摆,其悬挂点在竖直平面内按给定周期规律运动(见习题 3).

② 这种选择等价于将 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的线性变换矩阵对角化,需要求解相应的二次特征方程.我们假设这个方程的根不重合.

其中 $\Pi_1(t)$ 和 $\Pi_2(t)$ 是时间的周期函数(周期为 T).

这些函数中的常数 μ_1 和 μ_2 应该满足确定的关系.事实上,将方程

$$\ddot{x}_1 + \omega^2(t)x_1 = 0, \quad \ddot{x}_2 + \omega^2(t)x_2 = 0$$

分别乘以 x_2 和 x_1,相减后可得

$$\ddot{x}_1 x_2 - \ddot{x}_2 x_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1) = 0$$

或者

$$\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1 = \text{const.} \tag{27.4}$$

然而,对任何形如(27.6)的函数 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$,在 t 变为 $t+T$ 时,上面表达式左端乘以 $\mu_1\mu_2$.所以,为了使等式(27.4)在任何条件下,必须有

$$\mu_1\mu_2 = 1. \tag{27.5}$$

从方程(27.2)的系数为实数出发,可以进一步给出关于常数 μ_1,μ_2 的结论.如果 $x(t)$ 是方程(27.2)的某个解,则复共轭函数 $x^*(t)$ 也满足该方程.由此可知,常数 μ_1,μ_2 应该与另一对常数 μ_1^*,μ_2^* 重合,即 $\mu_1 = \mu_2^*$ 或者 μ_1,μ_2 都是实数.在第一种情况下,考虑到(27.5),有 $\mu_1 = 1/\mu_1^*$,即 $|\mu_1|^2 = |\mu_2|^2 = 1$.常数 μ_1 和 μ_2 的模都等于 1.

在第二种情况下,方程(27.2)的两个独立解的形式为

$$x_1(t) = \mu^{t/T}\Pi_1(t), \quad x_2(t) = \mu^{t/T}\Pi_2(t), \tag{27.6}$$

并且 μ 是不为 1 的正实数或者负实数.这些函数之一(当 $|\mu|>1$ 和 $|\mu|<1$ 时为第一个或者第二个函数)随时间指数增长.这就是说,系统的静止状态(在平衡位置 $x=0$)不稳定:偏离这个状态任意小量,都会使出现的位移 x 随时间快速增长.这种现象称为参数共振.

应该注意的是,当 x 和 $\dot{x}$ 的初值严格等于零时,它们以后也等于零,这不同于通常的共振(§22).在通常共振情况下,从零初始条件出发位移也会随时间增长(正比于 t).

下面我们研究一种重要的参数共振情况,函数 $\omega(t)$ 与常数 ω_0 相差很小,并且是周期函数

$$\omega^2(t) = \omega_0^2(1 + h\cos\gamma t), \tag{27.7}$$

其中常数 $h \ll 1$(可以认为 h 是正数,这是因为总可以通过选择时间起点来实现).下面将会看到,如果函数 $\omega(t)$ 接近 ω_0 的两倍,则参数共振更强烈.所以假设

$$\gamma = 2\omega_0 + \varepsilon,$$

其中 $\varepsilon \ll \omega_0$.

求解运动方程①

$$\ddot{x}+\omega_0^2[1+h\cos(2\omega_0+\varepsilon)t]x=0 \tag{27.8}$$

时,我们假设解的形式为

$$x=a(t)\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+b(t)\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t, \tag{27.9}$$

其中 $a(t)$和 $b(t)$是随时间变化很慢(与 cos 和 sin 相比)的函数.解的这个形式自然不是精确的.事实上,函数 $x(t)$也包括频率与 $\omega_0+\varepsilon/2$ 相差为 $2\omega_0+\varepsilon$ 的整数倍的项.然而,这些项是 h 的高阶小量,在一阶近似中可以忽略(参见习题 1).

将(27.9)代入(27.8),保留 ε 的一阶项,这时假设 $\dot{a}\sim\varepsilon a$, $\dot{b}\sim\varepsilon b$(这个假设在共振情况下的正确性由结果保证).将三角函数的乘积展开为三角函数之和,如

$$\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t\cdot\cos(2\omega_0+\varepsilon)t=\frac{1}{2}\cos\left(3\omega_0+\frac{3\varepsilon}{2}\right)t+\frac{1}{2}\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t$$

等等,我们略去频率为 $3\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)$的项,结果可得

$$-\left(2\dot{a}+b\varepsilon+\frac{h\omega_0}{2}b\right)\omega_0\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+\left(2\dot{b}-a\varepsilon+\frac{h\omega_0}{2}a\right)\omega_0\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t=0.$$

这个等式成立要求 sin 和 cos 的系数都等于零.由此可得函数 $a(t)$和 $b(t)$的两个线性微分方程.我们来求这两个方程的正比于 e^{st} 的解.于是有

$$sa+\frac{1}{2}\left(\varepsilon+\frac{h\omega_0}{2}\right)b=0,$$

$$\frac{1}{2}\left(\varepsilon-\frac{h\omega_0}{2}\right)a-sb=0,$$

这两个代数方程协调条件为

$$s^2=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2-\varepsilon^2\right]. \tag{27.10}$$

发生参数共振的条件是 s 为实数(即 $s^2>0$)②.可见,参数共振发生在 $2\omega_0$ 附近的区间③

$$-\frac{h\omega_0}{2}<\varepsilon<\frac{h\omega_0}{2}. \tag{27.11}$$

---

① 这种方程(γ 和 h 是任意的)在数学物理中称为马丢方程.

② 在(27.6)中的常数 μ 与 s 的关系是 $\mu=-e^{s\pi/\omega_0}$(当 t 替换为 $t+2\pi/2\omega_0$ 时,在(27.9)中的 sin 和 cos 改变符号).

③ 如果只对共振区间的边界感兴趣(对在内部 s 的表达式不感兴趣),则计算可以简化,只要注意到在边界上 $s=0$,即(27.9)中系数 a 和 b 为常数,这时我们立即得到相应于区间(27.11)的边界 $\varepsilon=\pm\omega_0/2$.

这个区间的宽度与 h 成正比,振动增强指数 s 在该区间有同样的量级.

在系统变化频率 γ 接近 $2\omega_0/n$(n 为任意整数)情况下,也会发生参数共振.但共振区间(不稳定区间)的宽度随 n 以 h^n 的规律迅速减小(见习题 2).振动增强指数也同样减小.

在系统存在微弱摩擦时,也存在参数共振现象,但不稳定区间变小.在 §25 中我们已经看到,摩擦使振幅按 $e^{-\lambda t}$ 的规律减小.所以参数共振时振动增强规律为 $e^{(s-\lambda)t}$(正数 s 是无摩擦情况的解),不稳定区间由等式 $s-\lambda=0$ 确定.于是,利用(27.10)中的 s,我们可得代替(27.11)的共振区间

$$-\sqrt{(h\omega_0/2)^2-4\lambda^2}<\varepsilon<\sqrt{(h\omega_0/2)^2-4\lambda^2}. \tag{27.12}$$

注意到,这时不是对于任意小的 h 都能发生共振,而是必须大于一个确定的"阈值" h_k,在(27.12)情况下为

$$h_k=\frac{4\lambda}{\omega_0}.$$

可以证明,对于接近频率 $2\omega_0/n$ 的共振,阈值 h_k 正比于 $\lambda^{1/n}$,即随着 n 增加.

习　　题

习题 1 试求在 $\gamma=2\omega_0$ 附近共振的不稳定区间边界,精确到 h^2 量级.

解:设方程(27.8)的解形式为

$$x=a_0\cos(\omega_0+\varepsilon/2)t+b_0\sin(\omega_0+\varepsilon/2)t+$$
$$a_1\cos3(\omega_0+\varepsilon/2)t+b_1\sin3(\omega_0+\varepsilon/2)t,$$

这里考虑了 h 的更高阶项(与(27.9)比较).我们只对不稳定区间的边界感兴趣,假设系数 a_0,b_0,a_1,b_1 是常数(相应于在第 83 页的脚注里提到的),在代入方程(27.8)时,将三角函数之积化为三角函数之和,略去频率为 $5(\omega_0+\varepsilon/2)$ 的项,这些项在更高阶近似中才需要.于是我们有

$$\left[-a_0\left(\omega_0\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{4}\right)+\frac{h\omega_0^2}{2}a_0+\frac{h\omega_0^2}{2}a_1\right]\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+$$
$$\left[-b_0\left(\omega_0\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{4}\right)-\frac{h\omega_0^2}{2}b_0+\frac{h\omega_0^2}{2}b_1\right]\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+$$
$$\left[\frac{h\omega_0^2}{2}a_0-8\omega_0^2a_1\right]\cos3\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+\left[\frac{h\omega_0^2}{2}b_0-8\omega_0^2b_1\right]\sin3\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t=0.$$

在频率为 $\omega_0+\varepsilon/2$ 的项中保留一阶和二阶小量,在频率为 $3(\omega_0+\varepsilon/2)$ 的项中保留一阶小量.每个方括号内的表达式都应该分别等于零.由后面两个方括号可得

$$a_1=\frac{h}{16}a_0,\quad b_1=\frac{h}{16}b_0,$$

然后再由前两个方括号可得

$$\omega_0\varepsilon \pm \frac{h\omega_0^2}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4}-\frac{h^2\omega_0^2}{32}=0.$$

求解这个方程,精确到 h^2 量级,我们可得不稳定区间边界的 ε 值:

$$\varepsilon = \pm\frac{h\omega_0}{2}-\frac{h^2\omega_0}{32}.$$

习题 2 试求在 $\gamma=\omega_0$ 附近共振的不稳定区间边界.

解:令 $\gamma=\omega_0+\varepsilon$,可得运动方程

$$\ddot{x}+\omega_0^2[1+h\cos(\omega_0+\varepsilon)t]x=0.$$

注意到所求边界值 $\varepsilon\sim h^2$,我们求如下形式的解:

$x=a_0\cos(\omega_0+\varepsilon)t+b_0\sin(\omega_0+\varepsilon)t+a_1\cos2(\omega_0+\varepsilon)t+b_1\sin2(\omega_0+\varepsilon)t+c_1$,

在此式中同时考虑了两个一阶项.为了求不稳定区间边界,我们假设系数都是常数,得

$$\left[-2\omega_0\varepsilon a_0+\frac{h\omega_0^2}{2}a_1+h\omega_0^2c_1\right]\cos(\omega_0+\varepsilon)t+\left[-2\omega_0\varepsilon b_0+\frac{h\omega_0^2}{2}b_1\right]\sin(\omega_0+\varepsilon)t+$$

$$\left[-3\omega_0^2a_1+\frac{h\omega_0^2}{2}a_0\right]\cos2(\omega_0+\varepsilon)t+\left[-3\omega_0^2b_1+\frac{h\omega_0^2}{2}b_0\right]\sin2(\omega_0+\varepsilon)t+$$

$$\left[\omega_0^2c_1+\frac{h\omega_0^2}{2}a_0\right]=0.$$

由此可得

$$a_1=\frac{h}{6}a_0,\quad b_1=\frac{h}{6}b_0,\quad c_1=-\frac{h}{2}a_0,$$

于是可得不稳定边界:

$$\varepsilon=-\frac{5}{24}h^2\omega_0,\quad \varepsilon=\frac{1}{24}h^2\omega_0.$$

习题 3 设平面摆的悬挂点在竖直平面内振动,试求此平面摆微振动的参数共振条件.

解:根据§5 的习题 3 求得的拉格朗日函数,微振动($\varphi\ll1$)的运动方程为

$$\ddot{\varphi}+\omega_0^2\left[1+4\frac{a}{l}\cos(2\omega_0+\varepsilon)t\right]\varphi=0,$$

其中 $\omega_0^2=g/l$.由此可见,$4a/l$ 起着正文中小参数 h 的作用.条件(27.11)写成如下形式:

$$|\varepsilon|<\frac{2a\sqrt{g}}{l^{3/2}}.$$

§ 28 非简谐振动

此前的微振动理论建立在系统势能和动能分别展开到坐标和速度的二阶项

基础上，这时运动方程是线性的，在这种近似下研究线性振动．在振幅足够小的条件下这种近似是合理的，然而，考虑更高阶的近似（称为非简谐振动或者非线性振动）会发现某些运动，尽管这些运动是微弱的，但在本质上却具有新的特性．

我们将拉格朗日函数展开至 3 阶．这时势能中出现坐标 x_i 的 3 阶项，在动能中出现速度和坐标的乘积，如 $\dot{x}_i\dot{x}_kx_l$．与表达式（23.3）不同的是，在函数 $a_{ik}(q)$ 的展开式中保留了 x 的一阶项．于是，拉格朗日函数的形式为

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i,k}(m_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k-k_{ik}x_ix_k)+\frac{1}{2}\sum_{i,k,l}n_{ikl}\dot{x}_i\dot{x}_kx_l-\frac{1}{3}\sum_{i,k,l}l_{ikl}x_ix_kx_l, \tag{28.1}$$

其中 n_{ikl}，l_{ikl} 是新的常系数．

如果从任意坐标 x_i 变换到简正坐标 Q_α（线性近似），则由于变换是线性的，（28.1）的第 3 和第 4 个和变为类似的和，其中坐标 x_i 和速度 $\dot{x}_i$ 将被 Q_α 和 $\dot{Q}_\alpha$ 代替．我们将这些和的系数用 $\lambda_{\alpha\beta\gamma}$ 和 $\mu_{\alpha\beta\gamma}$ 表示，拉格朗日函数可写成

$$L=\frac{1}{2}\sum(\dot{Q}_\alpha^2-\omega_\alpha^2Q_\alpha^2)+\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\lambda_{\alpha\beta\gamma}\dot{Q}_\alpha\dot{Q}_\beta Q_\gamma-\frac{1}{3}\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\mu_{\alpha\beta\gamma}Q_\alpha Q_\beta Q_\gamma. \tag{28.2}$$

我们不想完整地写出这个拉格朗日函数导出的运动方程．这个方程的形式为

$$\ddot{Q}_\alpha+\omega_\alpha^2Q_\alpha=f_\alpha(Q,\dot{Q},\ddot{Q}), \tag{28.3}$$

其中 f_α 是坐标 Q 及其对时间导数的二次齐次函数．

利用逐阶近似的方法，我们求方程的如下形式的解：

$$Q_\alpha=Q_\alpha^{(1)}+Q_\alpha^{(2)}, \tag{28.4}$$

其中 $Q_\alpha^{(2)}\ll Q_\alpha^{(1)}$，函数 $Q_\alpha^{(1)}$ 满足"无扰"方程

$$\ddot{Q}_\alpha^{(1)}+\omega_\alpha^2Q_\alpha^{(1)}=0,$$

即为通常的简谐振动

$$Q_\alpha^{(1)}=a_\alpha\cos(\omega_\alpha t+\alpha_\alpha). \tag{28.5}$$

在高一阶近似中，在（28.3）右端只保留到二阶小量，可得 $Q_\alpha^{(2)}$ 的方程

$$\ddot{Q}_\alpha^{(2)}+\omega_\alpha^2Q_\alpha^{(2)}=f_\alpha(Q^{(1)},\dot{Q}^{(1)},\ddot{Q}^{(1)}), \tag{28.6}$$

其中右端应该代入（28.5）．结果我们得到线性非齐次微分方程，其右端可以变换为简单周期函数之和．例如

$$\begin{aligned}Q_\alpha^{(1)}Q_\beta^{(1)}&=a_\alpha a_\beta\cos(\omega_\alpha t+\alpha_\alpha)\cos(\omega_\beta t+\alpha_\beta)\\&=\frac{1}{2}a_\alpha a_\beta\{\cos[(\omega_\alpha+\omega_\beta)t+\alpha_\alpha+\alpha_\beta]+\cos[(\omega_\alpha-\omega_\beta)t+\alpha_\alpha-\alpha_\beta]\}.\end{aligned}$$

于是方程(28.6)右端各项相应于频率为系统固有频率之和、之差的振动.方程的解应该包含同样周期的因子,因此在二阶近似中,在频率为 ω_α 的简谐振动上附加了频率为

$$\omega_\alpha \pm \omega_\beta \tag{28.7}$$

的振动(也包括倍频和零频,零频相应于常数位移).这些称为组合频率.组合振动的振幅正比于简谐振动的振幅之积 $a_\alpha a_\beta$(或者 a_α^2).

在拉格朗日函数的展开式中考虑更高阶小量的近似中,出现的组合共振的频率是更多频率的和与差,此外还会出现一个新现象.

这就是,在 3 阶近似的组合频率中出现与原频率 ω_α 一致的 $\omega_\alpha+\omega_\beta-\omega_\beta$.在应用上述方法时,运动方程右端将有共振项,导致方程的解中出现随时间增长的振幅.但是,从物理意义显然可知,没有外部能量来源的封闭系统不可能自己增大振动强度.

事实上,在高阶近似中基频 ω_α 与出现在势能二次表达式中"无扰"值 ω_α^0 相比发生了变化.在解中出现随时间增长项,是因为下面类型的展开式

$$\cos(\omega_\alpha^{(0)}+\Delta\omega_\alpha)t\approx\cos(\omega_\alpha^{(0)}t)-t\Delta\omega_\alpha\sin(\omega_\alpha^{(0)}t)$$

在 t 足够大时,显然不合理.

因此,在研究下一阶近似时,逐阶近似方法的形式需要改变,要使出现在解中的周期因子,从开始就包含准确的而不是近似的频率.由运动方程的解无共振项条件可以确定频率的改变.

我们用单自由度振动介绍这种方法,将拉格朗日函数写成

$$L=\frac{m\dot{x}^2}{2}-\frac{m\omega_0^2}{2}x^2-\frac{m\alpha}{3}x^3-\frac{m\beta}{4}x^4. \tag{28.8}$$

相应的运动方程为

$$\ddot{x}+\omega_0^2x=-\alpha x^2-\beta x^3. \tag{28.9}$$

我们将寻求级数形式的逐阶近似解

$$x=x^{(1)}+x^{(2)}+x^{(3)},$$

并且

$$x^{(1)}=a\cos\omega t \tag{28.10}$$

中精确的 ω 将在后面以级数形式 $\omega=\omega_0+\omega^{(1)}+\omega^{(2)}+\cdots$ 求解出来(适当选择初始时刻,总可以使初始相位角等于零).但是这时方程(28.9)不是很方便,这是因为代入(28.10)后,方程的右端不是严格等于零.所以我们预先将该方程形成等价形式

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\ddot{x}+\omega_0^2x=-\alpha x^2-\beta x^3-\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\ddot{x}. \tag{28.11}$$

此处假设 $x = x^{(1)} + x^{(2)}$，$\omega = \omega_0 + \omega^{(2)}$，略去二阶以上的小量，可得 $x^{(2)}$ 的方程

$$\ddot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = -\alpha a^2 \cos^2 \omega t + 2\omega_0 \omega^{(1)} a \cos\omega t$$
$$= -\frac{\alpha a^2}{2} - \frac{\alpha a^2}{2}\cos(2\omega t) + 2\omega_0 \omega^{(1)} a \cos\omega t.$$

等式右端无共振项的条件容易给出 $\omega^{(1)} = 0$，这与本节开始所讲的二阶近似方法一致. 此后，求解非齐次线性方程可得

$$x^{(2)} = -\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2} + \frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2}\cos(2\omega t). \tag{28.12}$$

进一步，在(28.11)中假设 $x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)}$，$\omega = \omega_0 + \omega^{(2)}$，可得 $x^{(3)}$ 的方程

$$\ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)} = -2\alpha x^{(1)} x^{(2)} - \beta x^{(1)3} + 2\omega_0 \omega^{(2)} x^{(1)}$$

或者将该方程右端代入(28.10)和(28.12)，经过简单的变换得

$$\ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)} = -a^3\left[\frac{\beta}{4} + \frac{\alpha^2}{6\omega_0^2}\right]\cos(3\omega t) + a\left[2\omega_0\omega^{(2)} + \frac{5a^2\alpha^2}{6\omega_0^2} - \frac{3}{4}a^2\beta\right]\cos\omega t.$$

令共振因子 $\cos\omega t$ 的系数等于零，可得对基频的修正量

$$\omega^{(2)} = \left(\frac{3\beta}{8\omega_0} - \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3}\right)a^2, \tag{28.13}$$

它正比于振幅的平方. 于是，3 阶组合振动为

$$x^{(3)} = \frac{a^3}{16\omega_0^2}\left(\frac{\alpha^2}{3\omega_0^2} + \frac{\beta}{2}\right)\cos(3\omega t). \tag{28.14}$$

§ 29　非线性振动中的共振

在强迫振动中计入非简谐项，在共振现象中会出现本质的新特性.

在方程(28.9)右端加入周期(频率为 γ)外力，得

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m}\cos\gamma t - \alpha x^2 - \beta x^3, \tag{29.1}$$

其中考虑了阻尼系数为 λ(下面假设为小量)的摩擦力. 严格地讲，在自由振动方程中考虑非线性项的同时，也应该考虑强迫力幅值中的高阶项，这些高阶项对应于强迫力对位移 x 可能的依赖关系. 我们不计入这些项仅仅是为了简化公式，它们不改变现象的本质.

设

$$\gamma = \omega_0 + \varepsilon$$

(ε 是小量)，即接近于通常的共振. 利用下面的方法，我们不研究方程(29.1)就可以探讨所产生运动的特性.

在线性近似中，在共振附近，强迫振动的振幅 b 对外力幅值 f 和频率 γ 的依

赖关系由(26.7)给出，该公式可以写成

$$b^2(\varepsilon^2+\lambda^2)=\frac{f^2}{4m^2\omega_0^2}. \tag{29.2}$$

振动的非线性导致固有频率对振幅的依赖，将固有频率写成

$$\omega_0+\chi b^2, \tag{29.3}$$

其中常数 χ 可以用非简谐系数表示(参见(28.13))．相应地，在公式(29.2)中(确切地说是在很小的差 $\gamma-\omega_0$ 中)用 $\omega_0+\chi b^2$ 代替 ω_0．

仍采用记号 $\varepsilon=\gamma-\omega_0$，结果可得方程

$$b^2[(\varepsilon-\chi b^2)^2+\lambda^2]=\frac{f^2}{4m^2\omega_0^2} \tag{29.4}$$

或者

$$\varepsilon=\chi b^2\pm\sqrt{\left(\frac{f}{2m\omega_0 b}\right)^2-\lambda^2}.$$

方程(29.4)是 b^2 的三次方程，它的实根确定强迫振动的振幅．在给定外力幅值 f 时，我们研究这个振幅对外力频率的依赖关系．

当 f 足够小时，振幅 b 也很小，可以在(29.4)中忽略 b 的二阶以上项，我们就得到函数关系 $b(\varepsilon)$(参见(29.2))，用极大值点为 $\varepsilon=0$ 的对称曲线表示(图 32a)．随着 f 的增大，曲线发生变形，开始还保持其特性，即有一个极大值(图 32b)，但极大值移动到正 ε 一边(当 $\chi>0$ 时)．这时方程(29.4)的 3 个根中只有一个是实数．

然而，从某个特定值 $f=f_k$(我们下面再确定)开始，曲线的性质发生改变．对于每个 $f>f_k$ 都存在方程(29.4)有 3 个实根的区域，相应于图 32c 中的 $BCDE$．

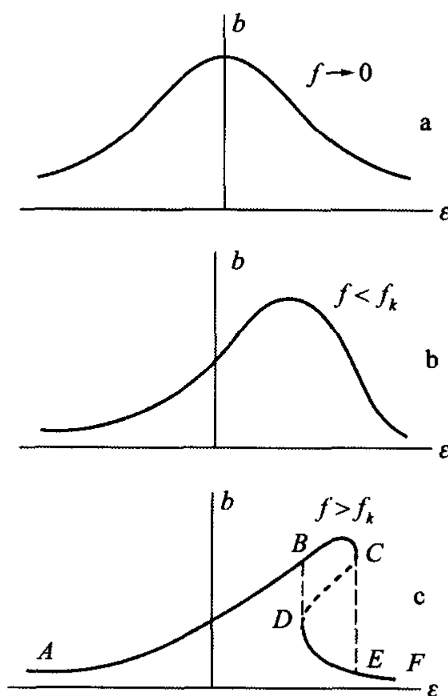


图 32

在 D 点和 C 点的条件 $\mathrm{d}b/\mathrm{d}\varepsilon=\infty$ 确定这个区域的边界．将方程(29.4)对 ε 求导得

$$\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\varepsilon}=\frac{-\varepsilon b+\chi b^3}{\varepsilon^2+\lambda^2-4\chi\varepsilon b^2+3\chi^2b^4}.$$

所以确定 D 点和 C 点位置的方程为(29.4)和

$$\varepsilon^2-4\chi\varepsilon b^2+3\chi^2b^4+\lambda^2=0. \tag{29.5}$$

ε 的两个值都是正的．在 $\mathrm{d}b/\mathrm{d}\varepsilon=0$ 的点，振幅达到最大值．这时 $\varepsilon=\chi b^2$，由(29.4)得

$$b_{\max} = \frac{f}{2m\omega_0\lambda} \tag{29.6}$$

这个值与(29.2)给出的最大值相同.

可以证明(我们不在这里给出)[①],方程(29.4)的 3 个实根中的中间根(即图 32c 上虚线段 CD),相应于不稳定振动:任意小的微弱作用都会使系统转到相应于较大根或者较小根的振动(即 BC 或者 DE 段).

因此,只有 ABC 和 DEF 两个分支对应着系统的实际振动.这时存在允许两个不同振幅的频率区域是非常重要的特性.所以,在外力频率逐渐增大时,强迫振动的振幅沿着曲线 ABC 增大.在 C 点振幅发生间断,跃落到 E 点,然后(在继续增大频率情况下)沿着曲线 EF 变化.如果现在减小频率,强迫振动振幅将沿着 FD 变化,在 D 点突跳到 B 点,然后沿着 BA 减小.

为了计算 f_k,我们注意到,这是(b^2 的)二次方程(29.5)有重根时对应的 f.当 $f=f_k$ 时整个曲线段 CD 变为一个拐点.令二次方程(29.5)的判别式等于零,得 $\varepsilon^2=3\lambda^2$,相应的根为 $\chi b^2=2\varepsilon/3$.代入方程(29.4)可得

$$f_k^2 = \frac{32m^2\omega_0^2\lambda^3}{3\sqrt{3}|\chi|}. \tag{29.7}$$

当 $\gamma\approx\omega_0$ 时,振动的非线性除了使共振性质改变,还导致出现新型的共振,即频率远离 ω_0 的外力可以激起频率接近 ω_0 的振动.

设外力频率为 $\gamma\approx\omega_0/2$,即

$$\gamma=\omega_0/2+\varepsilon.$$

在一阶线性近似中,外力激起同频率的振动,振幅与外力幅值成正比,即

$$x^{(1)} = \frac{4f}{3m\omega_0^2}\cos\left(\frac{\omega_0}{2}+\varepsilon\right)t$$

(根据公式(22.4)).考虑非线性后,在二阶近似中,在方程(29.1)右端出现频率为 $2\gamma=\omega_0$ 的项.就是说,将 $x^{(1)}$ 代入方程

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = -\alpha x^{(1)2},$$

引用倍角的余弦并在方程右端仅保留共振项,得

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = -\frac{8\alpha f^2}{9m^2\omega_0^4}\cos(\omega_0+2\varepsilon)t. \tag{29.8}$$

这个方程与(29.1)的不同之处仅在于,表达式中力的幅值 f 换成了 f^2.这就是说,这种共振与前述 $\gamma\approx\omega_0$ 共振性质相同,但强度较小.在方程(29.4)中用 $-8\alpha f^2/(9m^2\omega_0^4)$ 代替 f(以及用 2ε 代替 ε),可得函数关系 $b(\varepsilon)$:

---

① 证明可以在下面书中找到:Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.:Физматгиз,1958.

$$b^2[(2\varepsilon-\chi b^2)^2+\lambda^2]=\frac{16\alpha^2 f^4}{81m^4\omega_0^{10}} \tag{29.9}$$

下面设外力频率为

$$\gamma=2\omega_0+\varepsilon.$$

在一阶近似中有

$$x^{(1)}=-\frac{f}{3m\omega_0^2}\cos(2\omega_0+\varepsilon)t.$$

将 $x=x^{(1)}+x^{(2)}$ 代入方程(29.1),我们得不到像前一种情况下的具有共振外力性质的项.但由于正比于 $x^{(1)}x^{(2)}$ 的 3 阶项而产生参数共振.如果在所有非线性项中仅保留这一项,则得 $x^{(2)}$ 的方程:

$$\ddot{x}^{(2)}+2\lambda\dot{x}^{(2)}+\omega_0^2x^{(2)}=-2\alpha x^{(1)}x^{(2)}$$

或者

$$\ddot{x}^{(2)}+2\lambda\dot{x}^{(2)}+\omega_0^2\left[1-\frac{2\alpha f}{3m\omega_0^4}\cos(2\omega_0+\varepsilon)t\right]x^{(2)}=0, \tag{29.10}$$

这是(27.8)类型的方程(考虑摩擦),在一定的频率区间内振动不稳定.

但是,为了确定合成振幅,这个方程还不够.最终振幅的确定与非线性效应相关,为此在运动方程中应该保留 $x^{(2)}$ 的非线性项:

$$\ddot{x}^{(2)}+2\lambda\dot{x}^{(2)}+\omega_0^2x^{(2)}+\alpha x^{(2)2}+\beta x^{(2)3}=\frac{2\alpha f}{3m\omega_0^2}\cos[(2\omega_0+\varepsilon)t]x^{(2)} \tag{29.11}$$

注意到下面的情况,研究这个问题可以大大简化.在方程(29.11)右端,令

$$x^{(2)}=b\cos\left[\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+\delta\right]$$

(其中 b 是待求的共振振幅,常数 δ 是相位平移,它对后面研究不重要),同时将两个周期因子之积写成两个余弦之和,可得

$$\frac{\alpha fb}{3m\omega_0^2}\cos\left[\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t-\delta\right].$$

这是具有通常共振性质的项(对于固有频率 ω_0).所以问题又转化为本节开始段落研究的通常的非线性系统共振,区别仅在于 $\alpha fb/(3m\omega_0^2)$ 起到外力幅值的作用(用 $\varepsilon/2$ 替换了 ε).在方程(29.4)中做这样的替换,得

$$b^2\left[\left(\frac{\varepsilon}{2}-\chi b^2\right)^2+\lambda^2\right]=\frac{\alpha^2f^2b^2}{36m^2\omega_0^6}.$$

求解该方程得可能的振幅值:

$$b=0, \tag{29.12}$$

$$b^2=\frac{1}{\chi}\left[\frac{\varepsilon}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha f}{6m\omega_0^3}\right)^2-\lambda^2}\right] \tag{29.13}$$

$$b^2 = \frac{1}{\chi}\left[\frac{\varepsilon}{2} - \sqrt{\left(\frac{\alpha f}{6m\omega_0^3}\right)^2 - \lambda^2}\right] \tag{29.14}$$

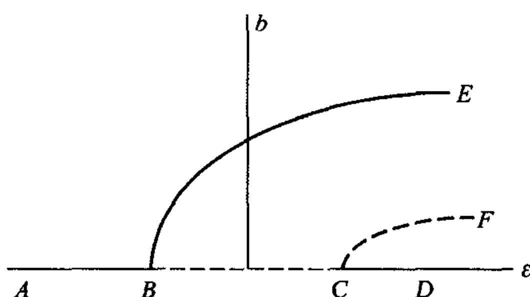


图 33

图 33 画出了所得的 b 对 ε 的依赖关系(对于 $\chi>0$,当 $\chi<0$ 时曲线方向相反). B 点和 C 点相应于

$$\varepsilon = \pm\sqrt{\left(\frac{\alpha f}{3m\omega_0^3}\right)^2 - 4\lambda^2}.$$

在 B 点左边只可能有 $b=0$,即没有共振,也不可能激发频率为 ω_0 的振动.在 B 和 C 之间有两个根:$b=0$(图 33 上线段 BC)和表达式(29.13)(分支 BE). C 点右边存在 3 个根(29.12)—(29.14).但是,不是所有这些值都对应稳定振动.在 BC 段[①]上 $b=0$ 不稳定,并且可以证明,相应于根(29.14)(位于另外两个根之间)的振动总是不稳定的.在图 33 上不稳定的 b 值用虚线表示.

我们研究外力频率逐渐减小的情况下,初始"静止"[②]系统的行为.在到达 C 点之前 $b=0$,然后跳跃到分支 EB 上.继续减小 ε,振幅在 B 点减小到零.反之,增大频率使振幅沿着 BE 增大[③].

我们所研究的共振是产生在非线性振动系统中的主要情况.在更高阶近似中会出现其它频率的共振.严格地讲,共振应该发生在满足关系式 $n\gamma + m\omega_0 = \omega_0$($m,n$ 是整数)的任意频率 γ 上,也就是说,在任意的 $\gamma = p\omega_0/q$(p,q 是整数)

---

① 这一段恰好相应于参数共振区间(27.12),比较(29.10)和(27.8)有 $|h| = 2\alpha f/(3m\omega_0^4)$.所研究现象可能存在的条件

$$\left|\frac{2\alpha f}{3m\omega_0^3}\right| > 4\lambda$$

相应于不等式 $h > h_k$.

② 注意,我们这里研究的只是共振,没有共振并不意味着系统静止,系统存在频率为 γ 的微弱强迫振动.

③ 注意,所有给出的公式只有在振幅 b(以及 ε)足够小情况下成立.事实上,曲线 BE 和 CF 以后相交于一点,达到这点时振动停止而且 $b=0$.

情况下，都应该发生共振．但是，随着近似阶数的增加，共振现象的强度（以及发生共振的频率区间）迅速减小，实际上可以观察到的共振只能是 $\gamma \approx p\omega_0/q$ 并且 p, q 的值都不大的情况．

习　题

习题　试求在频率 $\gamma \approx 3\omega_0$ 上共振的函数关系 $b(\varepsilon)$．

解：在一阶近似中

$$x^{(1)} = -\frac{f}{8m\omega_0^2}\cos[(3\omega_0 + \varepsilon)t].$$

对二阶近似 $x^{(2)}$，由(29.1)可得方程

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = -3\beta x^{(1)} x^{(2)2},$$

其中等式右端只写出了导致所研究共振的项．在该方程中假设

$x^{(2)} = b\cos\left[\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{3}\right)t + \delta\right]$ 并从 3 个余弦的乘积中分出共振项，可得方程右端表达式为

$$\frac{3\beta b^2 f}{32m\omega_0^2}\cos\left[\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{3}\right)t - 2\delta\right]$$

由此可见，b 对 ε 的依赖关系，可以在方程(29.4)中用 $3\beta b^2 f/(32m\omega_0^2)$ 代替 f，用 $\varepsilon/3$ 代替 ε 求得：

$$b^2\left[\left(\frac{\varepsilon}{3} - \chi b^2\right)^2 + \lambda^2\right] = \frac{9\beta^2 f^2}{2^{12} m^2 \omega_0^6} b^4 \equiv A b^4.$$

这个方程的根为

$$b = 0,\ b^2 = \frac{\varepsilon}{3\chi} + \frac{A}{2\chi^2} \pm \frac{1}{\chi}\sqrt{\frac{\varepsilon A}{3\chi} + \frac{A^2}{4\chi^2} - \lambda^2}.$$

在图 34 上画出了 b 对 ε 的依赖关系的特征曲线（$\chi > 0$）．$b = 0$（横轴）和分支 AB 对应于稳定振动．A 点相应的值为

$$\varepsilon_k = \frac{3(4\chi^2\lambda^2 - A^2)}{4\chi A},\quad b_k^2 = \frac{4\chi^2\lambda^2 + A^2}{4\chi^2 A}.$$

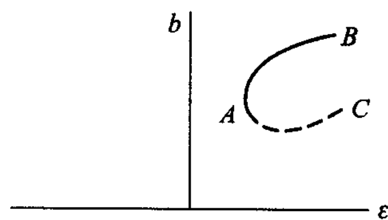


图 34

只有在 $\varepsilon > \varepsilon_k$ 和 $b > b_k$ 情况下存在振动．由于状态 $b = 0$ 总是稳定的，因此为了激起振动，初始的"推动"是必须的．

所得的公式只有在 ε 足够小时才成立．如果力的幅值满足条件 $\lambda^2/\omega_0 \ll A/\chi \ll \omega_0$，则 λ 是小量可以保证 ε 为小量．

§ 30 快速交变场中的运动

我们研究同时受定常场 U 和随时间变化的高频力

$$f = f_1\cos\omega t + f_2\sin\omega t \tag{30.1}$$

作用的质点的运动,其中 f_1, f_2 是坐标的函数. 高频是指频率满足条件 $\omega \gg 1/T$,其中 T 与质点在定常场 U 中运动周期同量级. 从数量上讲,力 f 不比场 U 的作用力弱. 但是我们将假设这个力引起的振动位移很小(以下用 ξ 表示).

为了简化计算,我们首先研究在仅依赖于一个空间坐标 x 的力场中的一维运动. 那么质点运动方程为①

$$m\ddot{x} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} + f. \tag{30.2}$$

由作用在质点上力场的性质可知,质点的运动是沿着某个平稳的轨迹移动,同时在轨迹附近做一维小幅振动(频率为 ω). 因此我们假设函数 $x(t)$ 的形式为

$$x(t) = X(t) + \xi(t), \tag{30.3}$$

其中 $\xi(t)$ 是微振动.

函数 $\xi(t)$ 在其周期 $2\pi/\omega$ 之内的平均值等于零,但函数 $X(t)$ 在这段时间内变化很小. 若用字母上面加横线表示平均值,则有 $\overline{x} = X(t)$,即函数 $X(t)$ 描述按快速振动平均化以后得到的"平稳"运动. 我们来推导确定这个函数的方程②.

将(30.3)代入(30.2)并按 ξ 展开,精确到一阶项,得

$$m\ddot{X} + m\ddot{\xi} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}X} - \xi\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}X^2} + f(X,t) + \xi\frac{\partial f}{\partial X}. \tag{30.4}$$

在这个方程中出现了不同性质的项,即振动项和平稳项. 显然,应该在这两组的每一组中分别相消. 对于振动项,只需写出

$$m\ddot{\xi} = f(X,t), \tag{30.5}$$

其它项包含小量 ξ,比我们写出的项小很多(导数 $\ddot{\xi}$ 正比于 ω^2,不是小量). 将(30.1)代入(30.5),积分(这时将 X 看作常数)得

$$\xi = -\frac{f}{m\omega^2}. \tag{30.6}$$

现在,我们将方程(30.4)对时间平均(按上面所指的意思). 因为一阶的 f 和 ξ 的平均值为零,可得方程

$$m\ddot{X} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}X} + \overline{\xi\frac{\partial f}{\partial X}} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}X} - \frac{1}{m\omega^2}\overline{f\frac{\partial f}{\partial X}},$$

---

① 坐标 x 不一定是笛卡儿坐标,相应的系数 m 不一定是质点的质量,也不一定像在(30.2)中那样假设是常数. 但是,这个假设并不影响最后的结果(见后面).

② 下述方法是基于卡皮采(1951,П. Л. Капице)的思想.

该方程只包含函数 $X(t)$. 最后重新写成

$$m\ddot{X}=-\frac{\mathrm{d}U_{\mathrm{eff}}}{\mathrm{d}X}, \tag{30.7}$$

其中"等效势能"为[1]

$$U_{\mathrm{eff}}=U+\frac{1}{2m\omega^2}\overline{f^2}=U+\frac{1}{4m\omega^2}(f_1^2+f_2^2). \tag{30.8}$$

比较此式和(30.6)可见,附加的项(与场 U 相比)不是别的,正是振动动能的平均值

$$U_{\mathrm{eff}}=U+\frac{m}{2}\overline{\dot{\xi}^2}. \tag{30.9}$$

可见,质点的运动对振动平均后,就像在定常场 U 之外还有一个附加的定常场,该附加场依赖于变场幅值的平方.

所得的结果很容易推广到用广义坐标 q_i 描述的任意自由度系统. 等效势能表达式(代替(30.8))为

$$U_{\mathrm{eff}}=U+\frac{1}{2\omega^2}\sum_{i,k}a_{ik}^{-1}\overline{f_if_k}=U+\sum_{i,k}\frac{a_{ik}}{2}\overline{\dot{\xi}_i\dot{\xi}_k}, \tag{30.10}$$

其中 a_{ik}^{-1}(一般来说为坐标的函数)是动能系数 a_{ik}(参见(5.5))构成的矩阵之逆矩阵的元素.

习 题

习题 1 试求摆的稳定平衡位置,假设悬挂点以高频 $\gamma(\gamma\gg\sqrt{g/l})$ 在竖直方向振动.

解:由 §5 的习题 3 情况 c 所得的拉格朗日函数可知,在这种情况下,变力为

$$f=-mla\gamma^2\cos\gamma t\sin\varphi$$

(用角 φ 代替 x). 所以等效势能为

$$U_{\mathrm{eff}}=mgl\left(-\cos\varphi+\frac{a^2\gamma^2}{4gl}\sin^2\varphi\right).$$

稳定平衡位置相应于这个函数取极小值. 摆竖直向下($\varphi=0$)总是稳定的. 在满足条件

$$a^2\gamma^2>2gl$$

的情况下,摆竖直向上($\varphi=\pi$)也是稳定的.

习题 2 同上题,但悬挂点水平振动.

---

① 在 m 依赖于 x 的情况下,经过较长的计算可以证明,公式(30.7)和(30.8)还是正确的.

解:由§5的习题3情况b所得的拉格朗日函数可知,$f = mla\gamma^2\cos\gamma t\cos\varphi$,然后可得

$$U_{\text{eff}} = mgl\left[-\cos\varphi + \frac{a^2\gamma^2}{4gl}\cos^2\varphi\right].$$

如果 $a^2\gamma^2 < 2gl$,则平衡位置 $\varphi = 0$ 稳定.如果 $a^2\gamma^2 > 2gl$,则稳定平衡位置相应于

$$\cos\varphi = \frac{2gl}{a^2\gamma^2}.$$

第六章

刚体的运动

§31 角速度

在力学中刚体是指质点间距离保持不变的质点组成的系统.当然,自然界中的实际系统满足这个条件只能是近似的.通常情况下,大部分固体的形状和尺寸变化很小,在研究它作为一个整体的运动规律时,完全可以不考虑这些变化.

为了推导方便,我们下面将刚体当作离散质点的集合.然而,这与力学中将刚体当作连续体而不考虑内部结构并不矛盾.将当作离散质点系得到的公式转换为当作连续体的公式,只需将质点的质量换成体积微元 $\mathrm{d}V$ 包含的质量 $\rho\mathrm{d}V$(其中 ρ 是刚体的密度)并对这个刚体积分.

为了描述刚体的运动,我们引入两个坐标系:“固定”坐标系,即惯性坐标系 XYZ,以及与刚体固连并参与刚体全部运动的动坐标系 $x_1=x, x_2=y, x_3=z$.取刚体质心为动坐标系原点比较方便.

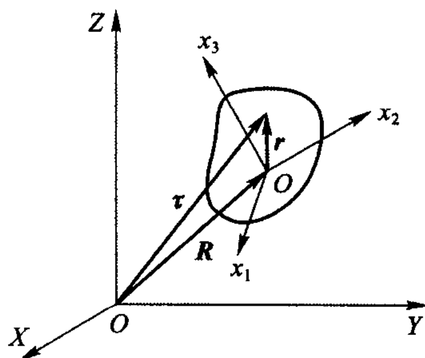


图 35

刚体相对固定坐标系的位置完全由动坐标系的位置确定.设径矢 $\boldsymbol{R}$ 表示动坐标系原点的位置(图 35).动坐标系的坐标轴相对固定坐标系的指向由 3 个独立的角确定,连同径矢 $\boldsymbol{R}$ 的分量共有 6 个坐标.因此,刚体有 6 个自由度.

我们研究刚体的无穷小位移,可以将其表示为两个位移之和.其中一个是无穷小的平移,使质心从初位置变为末位置,但不改变动坐标轴的指向.第二个是绕质心的无穷小

转动,使刚体达到最终位置.

我们将刚体上任意点 P 在动坐标系中的径矢用 $\boldsymbol{r}$ 表示,而在固定坐标系中的径矢用 $\boldsymbol{\tau}$ 表示.那么 P 点的无穷小位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}$ 等于质心位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{R}$ 与绕质心转动无穷小角度 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$ 产生的位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{r}$ 之和(参见(9.1)):

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}=\mathrm{d}\boldsymbol{R}+\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{r}.$$

将等式除以位移发生的时间 $\mathrm{d}t$,并引入速度

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}\,,\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{V}\,,\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\Omega}\,,\tag{31.1}$$

可得

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{V}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}.\tag{31.2}$$

矢量 $\boldsymbol{V}$ 是刚体质心的速度,称为刚体平动速度.矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 是刚体转动角速度,其方向(也是 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$ 的方向)与转动轴一致.于是,刚体上任意点的速度(相对固定坐标系),可以用刚体平动速度和转动角速度表示.

需要着重指出,在推导公式(31.2)时没有使用坐标原点与质心重合的特点.在后面计算运动刚体动能时,我们再解释这样选坐标原点的好处.

下面设与刚体固连的坐标系的原点不在质心 O,而在距离 O 点为 $\boldsymbol{a}$ 的 O'.坐标原点 O'的平移速度为 $\boldsymbol{V}'$,转动角速度为 $\boldsymbol{\Omega}'$.

我们重新研究刚体上任意点 P,用 $\boldsymbol{r}'$表示其相对 O'点的径矢.因此有 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{a}$,代入(31.2)得

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{V}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}'.$$

另一方面,根据 $\boldsymbol{V}'$和$\boldsymbol{\Omega}'$的定义,应该有$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{V}'+\boldsymbol{\Omega}'\times\boldsymbol{r}'$.所以我们可得如下结论:

$$\boldsymbol{V}'=\boldsymbol{V}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{a}\,,\qquad \boldsymbol{\Omega}'=\boldsymbol{\Omega}.\tag{31.3}$$

第二个等式非常重要.我们可以看出,与刚体固连的坐标系在任意时刻的转动角速度与这个坐标系无关.所有这样的坐标系在同一时刻绕相互平行的轴以大小相同的角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 转动.这使我们有理由将 $\boldsymbol{\Omega}$ 称为刚体的角速度.而平动速度没有这样"绝对的"性质.

由(31.3)的第一个公式可知,如果在坐标原点 O 的某种选择下 $\boldsymbol{V}$ 与 $\boldsymbol{\Omega}$(在给定时刻)相互垂直,则对于任意选择的原点 O',它们($\boldsymbol{V}'$和$\boldsymbol{\Omega}'$)也是相互垂直.由(31.2)可知,这种情况下所有点的速度都位于一个平面内,即在垂直于 $\boldsymbol{\Omega}$ 的平面内.这时总可以选择坐标原点 O'[①]使速度 $\boldsymbol{V}'=0$,刚体运动(在给定时刻)就

① 当然,它可以选在刚体之外.

是绕过 O' 的轴转动. 这个轴称为刚体瞬时转动轴①.

今后我们总是假设动坐标系原点选在刚体质心,因此瞬时转动轴也通过质心. 一般来说,当刚体运动时,$\boldsymbol{\Omega}$ 的大小和转动轴的方向也都会变化.

§ 32 惯性张量

为了计算刚体的动能,我们将刚体当作离散质点系,因此有

$$T = \sum \frac{mv^2}{2},$$

这里对刚体的所有质点求和. 为了书写公式简便,此处和下面我们省略了下标.

将公式(31.2)代入得

$$T = \sum \frac{m}{2}(\boldsymbol{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r})^2 = \sum \frac{m}{2} V^2 + \sum m\boldsymbol{V} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) + \sum \frac{m}{2}(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r})^2.$$

对刚体的所有质点 $\boldsymbol{V}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}$ 都相同. 所以在第一项中 $V^2/2$ 可以移到求和号之外, $\sum m$ 是刚体的质量,我们用 μ 表示. 第二项写成

$$\sum m\boldsymbol{V} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) = \sum m\boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{\Omega}) = \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{\Omega} \cdot \sum m\boldsymbol{r}.$$

由此可见,如果坐标原点选在刚体质心,则由于 $\sum m\boldsymbol{r} = 0$,故这一项等于零. 最后,我们展开第 3 项中矢量积的平方,结果得

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2}\sum m\left[\Omega^2 r^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{r})^2\right]. \tag{32.1}$$

于是,刚体动能可以写成两个部分之和. (32.1)的第一项是平动的动能,其形式如同整个刚体质量集中在质心. 第二项是刚体以角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 绕质心转动的动能. 需要强调指出,正是由于坐标原点选在质心上,才有动能分解为两部分的可能性.

我们将转动动能写成张量形式,用 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}$ 的分量 x_i, Ω_i 表示为②

$$\begin{aligned} T_{\text{bp}} &= \frac{1}{2}\sum m\left[\Omega_i^2 x_l^2 - \Omega_i x_i \Omega_k x_k\right] = \frac{1}{2}\sum m\left[\Omega_i \Omega_k \delta_{ik} x_l^2 - \Omega_i \Omega_k x_i x_k\right] \\ &= \frac{1}{2}\Omega_i \Omega_k \sum m(x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k). \end{aligned}$$

这里用到了恒等式 $\Omega_i = \delta_{ik}\Omega_k$,其中 δ_{ik} 是单位张量(其分量在 $i = k$ 时等于 1,在 $i \neq k$ 时等于零). 引入张量

---

① 在 $\boldsymbol{V}$ 与 $\boldsymbol{\Omega}$ 不平行的一般情况下,可以选择坐标原点使 $\boldsymbol{V}$ 与 $\boldsymbol{\Omega}$ 平行,即运动(在给定时刻)是绕某个轴的转动与沿该轴的平动之和.

② 在本章字母 i, j, k 表示张量的下标,可取值 1,2,3. 这时采用已知的求和规则,按此规则省略求和号,两次重复出现的下标(也称"哑"下标)就意味着对 1,2,3 求和,例如 $A_iB_i = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$, $A_l^2 = A_lA_l = \boldsymbol{A}^2$ 等等. 显然"哑"下标的表示可以任意改变(只要它不与该式子中使用的其它下标一样).

$$I_{ik} = \sum m(x_l^2\delta_{ik} - x_i x_k), \tag{32.2}$$

最终可得刚体动能表达式为

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik}\Omega_i\Omega_k. \tag{32.3}$$

将(32.3)减去势能可得刚体的拉格朗日函数

$$L = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik}\Omega_i\Omega_k - U. \tag{32.4}$$

一般情况下势能是确定刚体位置的 6 个变量的函数,例如质心的 3 个坐标 X, Y,Z 和确定动坐标轴相对固定坐标轴方向的 3 个角.

张量 I_{ik} 称为刚体惯性矩张量,或者简称刚体惯性张量.由定义(32.2)可知其对称性,即

$$I_{ik} = I_{ki}. \tag{32.5}$$

为了清楚起见,我们将惯性张量的分量写成显式

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} \sum m(y^2+z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m(x^2+z^2) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(x^2+y^2) \end{pmatrix}. \tag{32.6}$$

分量 I_{xx},I_{yy},I_{zz} 有时称为对相应坐标轴的转动惯量.

显然,惯性张量可以相加,即刚体转动惯量等于其各部分转动惯量之和.

如果将刚体当作连续体,则在定义(32.2)中的求和改为对刚体积分:

$$I_{ik} = \int \rho(x_l^2\delta_{ik} - x_i x_k)\mathrm{d}V. \tag{32.7}$$

像任何二阶对称张量一样,惯性张量可以通过选择坐标轴 x_1,x_2,x_3 的方向对角化.这些方向称为惯性主轴,而惯性张量相应的分量称为主转动惯量,用 I_1,I_2,I_3 表示.在这样选择坐标轴 x_1,x_2,x_3 时,转动动能表达式特别简单:

$$T_{\text{bp}} = \frac{1}{2}(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2). \tag{32.8}$$

我们发现,3 个主转动惯量中的每一个都不会大于另外两个之和.例如

$$I_1 + I_2 = \sum m(x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2) \geqslant \sum m(x_1^2 + x_2^2) = I_3. \tag{32.9}$$

3 个主转动惯量各不相等的刚体称为非对称陀螺.

如果两个主转动惯量相等,$I_1 = I_2 \neq I_3$,则刚体称为对称陀螺.在这种情况下,在平面 x_1x_2 内主轴方向的选择是任意的.

如果所有 3 个主转动惯量都相等,则刚体称为球形陀螺.在这种情况下 3 个主轴方向的选择都是任意的,可以任意选择 3 个相互垂直的轴作为主轴.

如果刚体具有某种对称性,确定惯性主轴就容易得多.显然,质心位置和惯

性主轴的方向应该具有同样的对称性.

例如,如果刚体有对称面,则质心应该在该平面内.两个惯性主轴应该位于该平面内,第 3 个主轴垂直该平面.对于这种情况,最明显的例子是平面质点系.这种情况下 3 个主转动惯量之间存在简单的关系.如果以系统所在平面为 x_1x_2 平面,则由于对所有质点 $x_3=0$,故

$$I_1 = \sum mx_2^2, \quad I_2 = \sum mx_1^2, \quad I_3 = \sum m(x_1^2 + x_2^2),$$

因此

$$I_3 = I_1 + I_2. \tag{32.10}$$

如果刚体有某阶的对称轴,则质心应该位于该轴上.一个惯性主轴与之重合,另外两个垂直此轴.这时如果对称轴的阶数大于 2,则刚体为对称陀螺.事实上,每个主轴(垂直对称轴)可以旋转一个不等于 180° 的角度,即这个轴的选择不是唯一的,而这只能是对称陀螺.

位于一条直线上的质点系是一个特殊情况.如果选择这个直线为 x_3 轴,则对于所有质点 $x_1=x_2=0$,因此两个主转动惯量相等,第 3 个为零:

$$I_1 = I_2 = \sum mx_3^2, \quad I_3 = 0. \tag{32.11}$$

这种系统称为转子.区别于任意刚体的一般情况,转子的特点是只有两个(不是 3 个)转动自由度,相应于绕 x_1 和 x_2 的转动,直线绕自身的转动是没有意义的.

最后,再做一个关于惯性张量的说明.虽然我们是在原点为质心的坐标系中定义这个张量的(只有在这个定义下基本公式(32.3)才成立),但是为了计算这个张量方便,有时可以先计算相似张量

$$I'_{ik} = \sum m(x_l'^2\delta_{ik} - x_i'x_k'),$$

这个张量是相对另一个坐标原点 O' 定义的.如果距离 OO' 由矢量 $\boldsymbol{a}$ 给出,则 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{a}$, $x_i=x_i'+a_i$,考虑到按照 O 点的定义, $\sum m\boldsymbol{r}=0$,我们得

$$I'_{ik} = I_{ik} + \mu(a^2\delta_{ik} - a_ia_k). \tag{32.12}$$

按这个公式,知道 I'_{ik} 就很容易计算出 I_{ik}.

习　　题

习题 1　将分子看作质点之间距离不变的系统,在下列情况下,试求分子的主转动惯量.

a) 分子由位于一条直线上的原子构成.

答案:

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{\mu}\sum_{a\neq b} m_a m_b l_{ab}^2, \qquad I_3 = 0,$$

其中 m_a 是原子的质量，l_{ab} 是原子 a 和 b 之间的距离，求和是对分子中的所有原子进行的（并且每一对值 a 和 b 在求和中出现一次）.

对于两原子的分子，只有一项，我们早就可以给出结果，即两个原子的折合质量乘以距离的平方：

$$I_1 = I_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2.$$

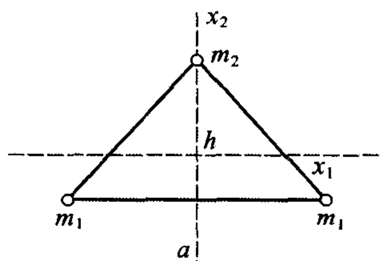


图 36

b) 形状为等腰三角形的 3 原子分子（图 36）.

答案：质心位于三角形的高上，距底边为 $X_2 = m_2 h/\mu$. 转动惯量为

$$I_1 = \frac{2m_1 m_2}{\mu} h^2, \quad I_2 = \frac{m_1}{2} a^2, \quad I_3 = I_1 + I_2.$$

c) 4 原子的分子，原子位于正三棱锥的顶点（图 37）.

答案：质心位于三棱锥的高上，距底边为 $X_3 = m_2 h/\mu$. 转动惯量为

$$I_1 = I_2 = \frac{3m_1 m_2}{\mu} h^2 + \frac{m_1}{2} a^2, \quad I_3 = m_1 a^2.$$

当 $m_1 = m_2$ 时，$h = a\sqrt{2/3}$，这是四面体分子，转动惯量为

$$I_1 = I_2 = I_3 = m_1 a^2.$$

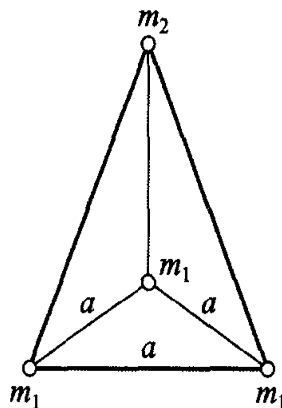


图 37

习题 2　试求均匀连续体的主转动惯量.

a) 长为 l 的细长杆.

答案：

$I_1 = I_2 = \mu l^2/12, \qquad I_3 = 0$（杆的粗细忽略不计）.

b) 半径为 R 的球体.

答案：

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{5}\mu R^2$$

（计算可得 $I_1 + I_2 + I_3 = 2\rho\int r^2 \mathrm{d}V$）.

c) 半径为 R 高为 h 的圆柱体.

答案：

$$I_1 = I_2 = \frac{\mu}{4}\left(R^2 + \frac{h^2}{3}\right), \quad I_3 = \frac{\mu}{2} R^2$$

（圆柱轴为 x_3）.

d) 棱边为 a，b，c 的长方体.

答案：

$$I_1=\frac{\mu}{12}(b^2+c^2),\qquad I_2=\frac{\mu}{12}(c^2+a^2),\qquad I_3=\frac{\mu}{12}(a^2+b^2)$$

(x_1,x_2,x_3 轴分别平行于棱边 a,b,c).

e) 高为 h 底面半径为 R 的圆锥体.

解：首先以圆锥顶点为坐标轴原点(图 38)，计算 I'_{ik}. 用柱坐标很容易计算得

$$I'_1=I'_2=\frac{3}{5}\mu\left(\frac{R^2}{4}+h^2\right)\qquad I'_3=\frac{3}{10}\mu R^2.$$

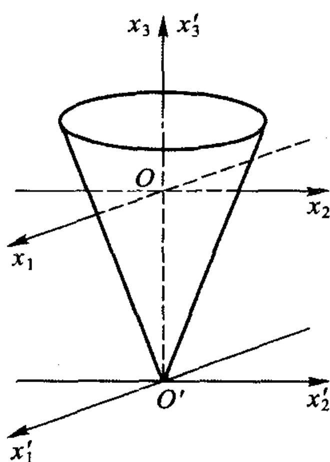


图 38

经过简单的计算可知，质心位于圆锥轴上，距离顶点 $a=3h/4$. 根据公式(32.12)可得

$$I_1=I_2=I'_1-\mu a^2=\frac{3}{20}\mu\left(R^2+\frac{h^2}{4}\right)$$

$$I_3=I'_3=\frac{3}{10}\mu R^2.$$

f) 主轴为 a,b,c 的三轴椭球体.

解：质心与椭球中心重合，惯性主轴与椭球主轴重合. 坐标变换 $x=a\xi,y=b\eta,z=c\zeta$ 将椭球方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

变为单位球方程

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1.$$

通过这个坐标变换可将对椭球体的积分转化为对圆球体的积分. 例如，对 x 轴的转动惯量为

$$I_1=\rho\iiint(y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\rho abc\iiint(b^2\eta^2+c^2\zeta^2)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$$
$$=\frac{abc}{2}I'(b^2+c^2),$$

其中 I' 是单位球的转动惯量.

考虑到椭球体积等于 $4\pi abc/3$，最后可得转动惯量

$$I_1=\frac{\mu}{5}(b^2+c^2),\qquad I_2=\frac{\mu}{5}(a^2+c^2),\qquad I_3=\frac{\mu}{5}(a^2+b^2).$$

习题 3 试求物理摆(在重力场中绕着水平轴摆动的刚体)的微振动频率.

解：设 l 为刚体质心到转动轴的距离，而 α,β,γ 是惯性主轴与转动轴之间的夹角. 从质心作垂线到转动轴，它与竖直方向夹角 φ 作为坐标变量. 质心速度为 $V=l\dot{\varphi}$，而角速度在主轴上投影为 $\dot{\varphi}\cos\alpha,\dot{\varphi}\cos\beta,\dot{\varphi}\cos\gamma$. 假设 φ 很小，求得势能

$$U=\mu gl(1-\cos\varphi)\approx\frac{1}{2}\mu gl\varphi^2.$$

所以拉格朗日函数为

$$L=\frac{\mu l^2}{2}\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}(I_1\cos^2\alpha+I_2\cos^2\beta+I_3\cos^2\gamma)\dot{\varphi}^2-\frac{\mu gl}{2}\varphi^2.$$

由此,对振动频率有

$$\omega^2=\frac{\mu gl}{\mu l^2+I_1\cos^2\alpha+I_2\cos^2\beta+I_3\cos^2\gamma}.$$

习题 4 试求图 39 所示系统的动能,其中 OA 和 AB 是长为 l 的均质细杆,铰接于 A 点.杆 OA 绕 O 点(在图示平面内)转动,杆 AB 的端点 B 沿着 Ox 轴运动.

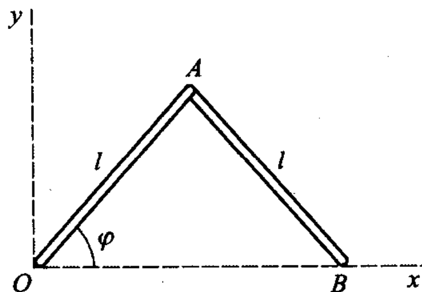


图 39

解:杆 OA 质心(位于杆中心)的速度为 $l\dot{\varphi}/2$,其中 φ 为角 AOB.所以杆 OA 的动能为

$$T_1=\frac{\mu l^2}{8}\dot{\varphi}^2+\frac{I}{2}\dot{\varphi}^2$$

(μ 是一根杆的质量).

杆 AB 的笛卡儿坐标为:$X=(3l/2)\cos\varphi$, $Y=(l/2)\sin\varphi$.因为这根杆的转动角速度也是 $\dot{\varphi}$,故其动能为

$$T_2=\frac{\mu}{2}(\dot{X}^2+\dot{Y}^2)+\frac{I}{2}\dot{\varphi}^2=\frac{\mu l^2}{8}(1+8\sin^2\varphi)\dot{\varphi}^2+\frac{I}{2}\dot{\varphi}^2.$$

系统的总动能等于

$$T=\frac{\mu l^2}{3}(1+3\sin^2\varphi)\dot{\varphi}^2$$

(根据习题 2 的 a),代入了 $I=\mu l^2/12$).

习题 5 试求在平面上滚动的圆柱(半径为 R)的动能.圆柱的质量分布使得其惯性主轴之一平行于圆柱轴,相距为 a,圆柱对该惯性主轴的转动惯量为 I.

解:从质心作圆柱轴的垂线,该垂线与竖直方向夹角为 φ(图 40).在每一时刻圆柱的运动可以看作绕瞬时转动轴的转动,瞬时转动轴就是圆柱与平面的交线,这个转动的角速度为 $\dot{\varphi}$(绕所有平行轴的转动角速度都相同).质心距离瞬时转动轴为 $\sqrt{a^2+R^2-2aR\cos\varphi}$,所以质心速度为 $V=\dot{\varphi}\sqrt{a^2+R^2-2aR\cos\varphi}$.动能为

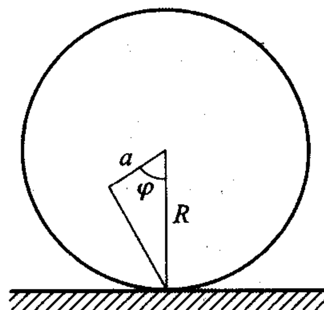


图 40

$$T=\frac{\mu}{2}(a^2+R^2-2aR\cos\varphi)\dot{\varphi}^2+\frac{I}{2}\dot{\varphi}^2.$$

习题 6 半径为 a 的均质圆柱在半径为 R 的圆柱形曲面内滚动,试求圆柱的动能(图 41).

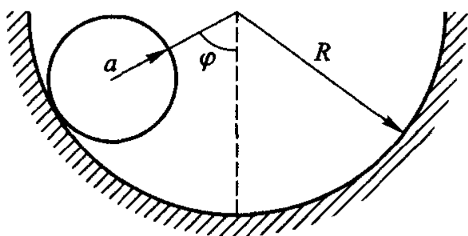


图 41

解:设 φ 是两个圆柱中心连线与竖直方向的夹角.圆柱质心在轴上,其速度为 $V=\dot{\varphi}(R-a)$.瞬时转动轴是两个圆柱的交线,圆柱角速度为

$$\Omega=\frac{V}{a}=\dot{\varphi}\frac{R-a}{a}.$$

如果 I_3 是圆柱对其轴的转动惯量,则

$$T=\frac{\mu}{2}(R-a)^2\ \dot{\varphi}^2+\frac{I_3}{2}\ \frac{(R-a)^2}{a^2}\dot{\varphi}^2=\frac{3}{4}\mu(R-a)^2\ \dot{\varphi}^2 \qquad (32.13)$$

(I_3 已由习题 2 的 c)求得).

习题 7 试求在平面上滚动的圆锥的动能.

解:设圆锥与平面交线为 OA,用 θ 表示 OA 与平面上某固定方向的夹角(图 42).质心位于圆锥轴上,其速度为 $V=a\dot{\theta}\cos\alpha$,这里 2α 是圆锥顶角,a 为质心到顶点的距离.我们计算转动角速度,即绕瞬时转动轴 OA 的角速度:

$$\Omega=\frac{V}{a\sin\alpha}=\dot{\theta}\cot\alpha.$$

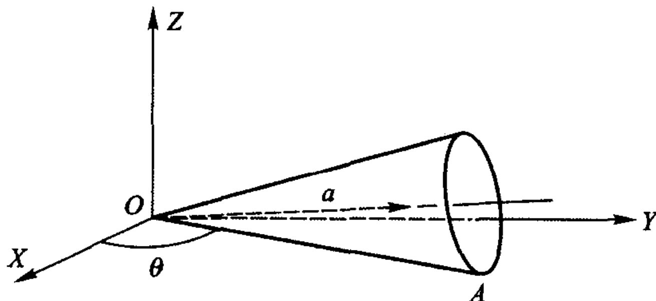


图 42

惯性主轴之一(x_3 轴)与圆锥轴重合,选择另一个轴(x_2 轴)垂直于圆锥轴和直线 OA. 角速度矢量 $\boldsymbol{\Omega}$(平行于 OA)在惯性主轴上的投影为 $\Omega\cos\alpha, 0, \Omega\sin\alpha$. 最后可得动能

$$T=\frac{\mu a^2}{2}\dot{\theta}^2\cos^2\alpha+\frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2\cos^2\alpha+\frac{I_3}{2}\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha}\dot{\theta}^2=\frac{3\mu h^2}{40}\dot{\theta}^2(1+5\cos^2\alpha)$$

(h 是圆锥的高度, I_1, I_3, a 由习题 2 的 e)给出).

习题 8　试求圆锥的动能. 圆锥的底面在平面上滚动,而顶点与平面的距离始终等于圆锥底面半径(因而圆锥轴平行于平面).

解:设 θ 表示平面上给定方向与圆锥轴投影的夹角(图 43). 质心速度为 $V=a\dot{\theta}$(符号同习题 7). 瞬时转动轴是圆锥母线 OA,其中 A 是圆锥与平面的切点. 质心到该轴的距离为 $a\sin\alpha$,所以

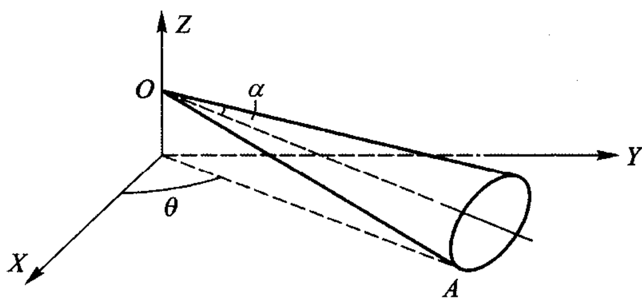


图 43

$$\Omega=\frac{V}{a\sin\alpha}=\frac{\dot{\theta}}{\sin\alpha}.$$

矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 在惯性主轴上的投影为(选择 x_2 轴垂直于圆锥轴和 OA): $\Omega\sin\alpha=\dot{\theta}$, $0, \Omega\cos\alpha=\dot{\theta}\cot\alpha$. 所以动能为

$$T=\frac{\mu a^2}{2}\dot{\theta}^2+\frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2+\frac{I_3}{2}\dot{\theta}^2\cot^2\alpha=\frac{3\mu h^2}{40}\dot{\theta}^2\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}+5\right).$$

习题 9　均匀二轴椭球绕自己的一个轴(AB, 图 44)旋转,并且这个轴本身又绕着过椭球中心的垂直线 CD 转动. 试求椭球的动能.

解:用 θ 表示绕 CD 的转角,而用 φ 表示绕 AB 的转角(CD 与垂直 AB 的惯性主轴 x_1 的夹角). 那么 $\boldsymbol{\Omega}$ 在惯性主轴上投影为

$$\dot{\theta}\cos\varphi,\quad \dot{\theta}\sin\varphi,\quad \dot{\varphi}$$

(并且 x_3 轴与 AB 重合). 由于质心与椭球质心重合,所以动能为

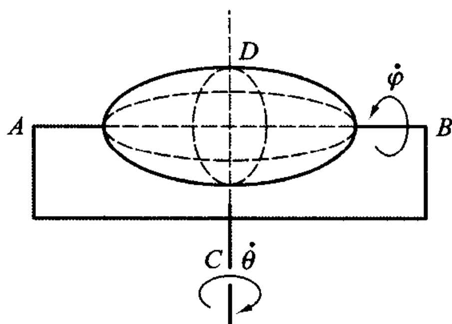


图 44

$$T=\frac{1}{2}(I_1\cos^2\varphi+I_2\sin^2\varphi)\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}I_3\ \dot{\varphi}^2.$$

习题 10 同上题,假定 AB 轴是倾斜的(图 45),椭球相对这个轴对称.

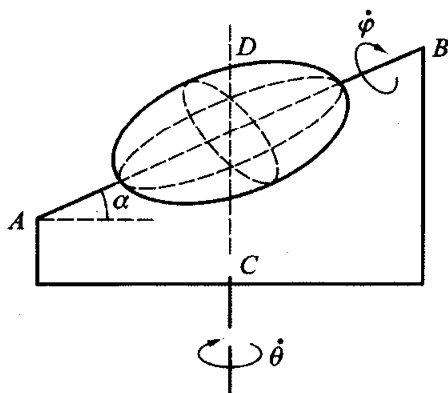


图 45

解:矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 在 AB 轴和另外两个轴(可以任意选择)上投影为

$$\dot{\theta}\cos\alpha\cos\varphi,\quad \dot{\theta}\cos\alpha\sin\varphi,\quad \dot{\varphi}+\dot{\theta}\sin\alpha.$$

动能为

$$T=\frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2\cos^2\alpha+\frac{I_3}{2}(\dot{\varphi}+\dot{\theta}\sin\alpha)^2.$$

§ 33 刚体动量矩

我们知道,系统的动量矩取决于它相对哪个点定义.在刚体力学中最合理的选择是动坐标系的原点,即刚体的质心.以后我们认为 $\boldsymbol{M}$ 就是这样定义的.

根据公式(9.6),当选择刚体质心为坐标原点时,$\boldsymbol{M}$ 就是"固有"动量矩,仅与刚体的点相对质心的运动有关.换句话说,在定义 $\boldsymbol{M}=\sum m\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$ 中应该用 $\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}$ 代替 $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{M} = \sum m\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) = \sum m\left[r^2\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{r})\right],$$

或者用张量表示为

$$M_i = \sum m(x_l^2\Omega_i - x_i x_k \Omega_k) = \Omega_k \sum m(x_l^2\delta_{ik} - x_i x_k).$$

最后,考虑到惯性张量定义(32.2)得

$$M_i = I_{ik}\Omega_k. \tag{33.1}$$

如果坐标轴 x_1, x_2, x_3 的方向沿着刚体惯性主轴,则这个公式给出

$$M_1 = I_1\Omega_1, \qquad M_2 = I_2\Omega_2, \qquad M_3 = I_3\Omega_3. \tag{33.2}$$

对于球形陀螺的特殊情况,3 个主转动惯量都相等,有

$$\boldsymbol{M} = I\boldsymbol{\Omega}, \tag{33.3}$$

即动量矩矢量平行于角速度矢量并且有相同的指向.

在任意刚体的一般情况下,矢量 $\boldsymbol{M}$ 一般不与矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 重合,只有在刚体绕某个惯性主轴转动时,$\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}$ 才方向相同.

我们研究不受任何外力作用的自由刚体的运动.我们不考虑等速平动,只研究自由转动.

像所有封闭系统一样,自由转动刚体的动量矩是常量.对于球形陀螺,$\boldsymbol{M} = \text{const}$ 导致 $\boldsymbol{\Omega} = \text{const}$.这就是说,球形陀螺在一般情况下是绕着定常轴等速转动.

转子的情况更简单.这时也有 $\boldsymbol{M} = I\boldsymbol{\Omega}$,并且 $\boldsymbol{\Omega}$ 垂直于转子轴.所以,转子的自由转动是在一个平面内绕着垂直于该平面的轴等速转动.

利用动量矩守恒定律可以确定更复杂的对称陀螺的自由转动.

利用主轴 x_1, x_2 方向(垂直于陀螺对称轴 x_3)选择的任意性,我们选 x_2 垂直于矢量 $\boldsymbol{M}$ 和 x_3 轴确定的平面.那么 $M_2 = 0$,由公式(33.2)可知,$\Omega_2 = 0$.这就是说,在每个时刻 $\boldsymbol{M}$,$\boldsymbol{\Omega}$ 和陀螺对称轴位于同一个平面(图 46).由此可得,在陀螺对称轴上所有点的速度 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}$,在每个时刻都垂直于这个平面,换言之,陀螺轴等速(见下面)绕 $\boldsymbol{M}$ 的方向转动,画出一个圆锥(就是所谓的陀螺规则进动).同时,陀螺绕自己的轴等速转动.

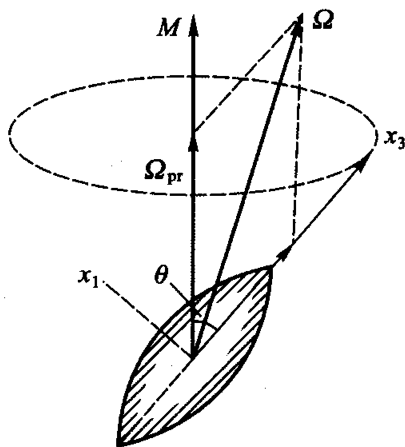


图 46

这两个转动的角速度可以用给定的动量矩 M 以及陀螺轴与 $\boldsymbol{M}$ 方向的夹角 θ 表示.陀螺绕自己的轴转动角速度就是矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 在该轴上的投影 Ω_3:

$$\Omega_3 = \frac{M_3}{I_3} = \frac{M}{I_3}\cos\theta. \tag{33.4}$$

为了求进动角速度 Ω_{pr},应该利用平行四边形法则将矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 沿着 x_3 和 $\boldsymbol{M}$ 方向分解.第一个分量不会使陀螺轴产生任何位移,第二个分量给出进动角速度.由图 46 可知,$\Omega_{pr}\sin\theta=\Omega_1$,由于 $\Omega_1=M_1/I_1=M\sin\theta/I_1$,所以得

$$\Omega_{pr}=M/I_1. \tag{33.5}$$

§34 刚体运动方程

由于一般情况下刚体有 6 个自由度,因此一般情况下运动方程组应该包含 6 个独立的方程.这些方程可以写成动量和动量矩这两个矢量对时间的导数形式.

得到第一个矢量方程只需将每个质点的方程 $\dot{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{f}$ 求和,其中 $\boldsymbol{p}$ 是质点的动量,$\boldsymbol{f}$ 是作用在质点上的力.引入刚体的动量:

$$\boldsymbol{P}=\sum\boldsymbol{p}=\mu\boldsymbol{V}$$

和作用在刚体上总的力 $\sum\boldsymbol{f}=\boldsymbol{F}$,可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}. \tag{34.1}$$

尽管我们定义 $\boldsymbol{F}$ 为作用在每个质点上的所有力 $\boldsymbol{f}$ 之和,包括刚体的质点之间相互作用力,但事实上包含在 $\boldsymbol{F}$ 中的只有外力.刚体内部所有质点之间的作用力相互抵消,事实上,当没有外力时刚体的动量应该守恒,就像所有封闭系统一样,即应该有 $\boldsymbol{F}=0$.

如果 U 为刚体在外场中的势能,则力 $\boldsymbol{F}$ 可以用势能对刚体质心坐标的导数确定:

$$\boldsymbol{F}=-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{R}}. \tag{34.2}$$

事实上,当刚体平移 $\delta\boldsymbol{R}$ 时,刚体的每个质点的径矢 $\boldsymbol{\tau}$ 也产生同样的变化,所以势能变化为

$$\delta U=\sum\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{\tau}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}=\delta\boldsymbol{R}\cdot\sum\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{\tau}}=-\delta\boldsymbol{R}\cdot\sum\boldsymbol{f}=-\boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{R}.$$

由此可以发现,方程(34.1)也可以作为对质心坐标的拉格朗日方程得到:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{V}}=\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{R}},$$

其中拉格朗日函数为(32.4),对此有

$$\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{V}}=\mu\boldsymbol{V}=\boldsymbol{P},\qquad \frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{R}}=-\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{F}.$$

下面推导动量矩 $\boldsymbol{M}$ 对时间导数确定的第二个运动方程.为了推导方便,我们选择固定(惯性)参考系,使得在给定时刻刚体质心静止.

我们有

$$\dot{\boldsymbol{M}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \sum \dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{p} + \sum \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{p}}.$$

对于我们所选的参考系($\boldsymbol{V}=0$),在给定时刻 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 与速度 $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$ 相等.由于矢量 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ 方向相同,故 $\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{p} = 0$.将 $\dot{\boldsymbol{p}}$ 替换为 $\boldsymbol{f}$,最后可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{K}, \tag{34.3}$$

其中

$$\boldsymbol{K} = \sum \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}. \tag{34.4}$$

由于动量矩 $\boldsymbol{M}$ 是相对质心定义的(参见§33),在从一个参考系变换到另一个参考系时保持不变.由公式(9.5)和 $\boldsymbol{R}=0$ 这是显然的.由此可知,根据伽利略相对性原理,这里在特定参考系选择下得到的公式(34.4),对所有惯性参考系都成立.

矢量 $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}$ 称为 $\boldsymbol{f}$ 的*力矩*,因此 $\boldsymbol{K}$ 是作用在刚体上所有的力矩之和.正如 $\boldsymbol{F}$ 一样,在(34.4)中实际上只计入外力,根据动量矩守恒定律,封闭系统的所有内力的力矩之和等于零.

力矩像动量矩一样,一般依赖于坐标原点的选择.在(34.3)和(34.4)中力矩和动量矩是相对刚体质心定义的.

当坐标原点平移 $\boldsymbol{a}$ 时,刚体质点的新径矢 $\boldsymbol{r}'$ 与老径矢 $\boldsymbol{r}$ 的关系为 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{a}$.所以

$$\boldsymbol{K} = \sum \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f} = \sum \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{f} + \sum \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{f}$$

或者

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}' + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{F}. \tag{34.5}$$

由此可见,如果 $\boldsymbol{F}=0$(这时称*力偶*作用在刚体上),则力矩不依赖于坐标原点的选择.

方程(34.3)可以看作对于"转动坐标"的拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\Omega}} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\varphi}}.$$

事实上,将拉格朗日函数(32.4)对矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 的分量求导可得

$$\frac{\partial L}{\partial \Omega_i} = I_{ik}\Omega_k = M_i.$$

当刚体转动无穷小角度 $\delta\varphi$ 时,势能改变量为

$$\delta U = -\sum \boldsymbol{f} \cdot \delta \boldsymbol{r} = -\sum \boldsymbol{f} \cdot (\delta\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{r}) = -\delta\boldsymbol{\varphi} \cdot \sum \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f} = -\boldsymbol{K} \cdot \delta\boldsymbol{\varphi},$$

由此可得

$$\boldsymbol{K}=-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\varphi}}, \tag{34.6}$$

因此有

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\varphi}}=-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\varphi}}=\boldsymbol{K}.$$

假设矢量 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 相互垂直. 这种情况下总可以找到矢量 $\boldsymbol{a}$，使得公式(34.5)中 $\boldsymbol{K}'$等于零，进而

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{F}. \tag{34.7}$$

这时 $\boldsymbol{a}$ 的选择不是唯一的，给它加上任何平行于 $\boldsymbol{F}$ 的矢量，都不会改变等式(34.7)，因此条件 $\boldsymbol{K}'=0$ 不是给出动坐标系中的一个点，而是一条直线. 于是，在 $\boldsymbol{K}\perp\boldsymbol{F}$ 情况下，所有力的作用可以归结为沿着给定直线作用的一个力 $\boldsymbol{F}$.

均匀力场就属于这种情况，作用在质点上的力为 $\boldsymbol{f}=e\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 是刻画力场的常矢量，e 刻画质点相对给定力场性质①. 在这种情况下有

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{E}\sum e, \qquad \boldsymbol{K}=\sum e\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{E}.$$

假设 $\sum e\neq 0$，引入径矢

$$\boldsymbol{r}_0=\frac{\sum e\boldsymbol{r}}{\sum e}. \tag{34.8}$$

我们可得下面的简单表达式：

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{r}_0\times\boldsymbol{F}. \tag{34.9}$$

于是，当刚体在均匀力场中运动时，力场的影响归结为作用在径矢为(34.8)的点上一个力 $\boldsymbol{F}$. 这个点的位置完全由刚体的性质决定，例如，在重力场中该点与刚体质心重合.

§35 欧拉角

我们已经知道，描述刚体运动可以用 3 个质心坐标和 3 个确定动坐标轴 x_1, x_2, x_3 相对固定坐标轴 X, Y, Z 指向的角度. 所谓的欧拉角作为这 3 个角就很方便.

因为我们现在只对坐标轴之间的夹角感兴趣，可以选择同一个点为两个坐标系的原点(图 47). 动坐标系的平面 x_1x_2 与固定平面 XY 相交于某一直线(在图 47 上的 ON)，该直线称为节线. 节线垂直于 Z 轴和 x_3 轴，我们选择其正方向使它相应于矢量积 $\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{x}_3$ 的方向(其中 $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}_3$ 分别是坐标轴 Z, x_3 方向的单位

---

① 例如，在均匀电场中，$\boldsymbol{E}$ 是电场强度，而 e 是电荷. 在均匀重力场中，$\boldsymbol{E}$ 是重力加速度 $\boldsymbol{g}$，而 e 是质点的质量.

矢量).

我们用下面 3 个角确定动坐标轴 x_1, x_2, x_3 相对固定坐标轴 X, Y, Z 的位置：Z 轴和 x_3 轴之间的夹角 θ，X 轴和 N 轴之间的夹角 φ，N 轴和 x_1 轴之间的夹角 ψ. 按螺旋法则相应于绕 Z 和 x_3 来计算角 φ 和 ψ. 角 θ 取值范围是从零到 π，而角 φ 和 ψ 的取值范围是从零到 2π①.

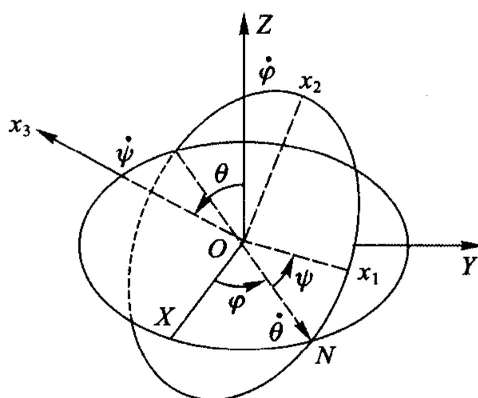


图 47

下面我们用欧拉角及其导数表示角速度矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 在 x_1, x_2, x_3 上的分量. 为此需要将角速度 $\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$ 向这些轴投影. 角速度 $\dot{\theta}$ 的方向沿着节线 ON，它沿着 x_1, x_2, x_3 的分量等于

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}\cos\psi, \qquad \dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}\sin\psi, \quad \dot{\theta}_3 = 0.$$

角速度 $\dot{\varphi}$ 的方向沿着 Z 轴，它沿着 x_3 的分量等于 $\dot{\varphi}_3 = \dot{\varphi}\cos\theta$，而在平面 x_1x_2 上的投影等于 $\dot{\varphi}\sin\theta$. 将后者再分解到 x_1 和 x_2，可得

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi, \quad \dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi.$$

最后，角速度 $\dot{\varphi}$ 的方向沿着 x_3 轴.

汇集这些沿着每个轴的分量，最终得

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi, \\ \Omega_2 &= \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi, \\ \Omega_3 &= \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}. \end{aligned} \tag{35.1}$$

如果选择刚体的惯性主轴为坐标轴 x_1, x_2, x_3，则将(35.1)代入(32.8)，可得用欧拉角表示的转动动能.

对于对称陀螺，$I_1 = I_2 \neq I_3$，经过简单推导可得

$$T_{\text{bp}} = \frac{I_1}{2}(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})^2. \tag{35.2}$$

应该指出，利用对称陀螺惯性主轴 x_1, x_2 方向选择的任意性，可以更简单地得到这些表达式. 如果认为 x_1 轴沿着节线 ON，即 $\psi = 0$，可得角速度分量的简单表达式

① 角 θ 和 $\varphi - \pi/2$ 是 x_3 轴相对 X, Y, Z 的极角和方位角. 同时角 θ 和 $\pi/2 - \psi$ 是 Z 轴相对 x_1, x_2, x_3 的极角和方位角.

$$\Omega_1 = \dot{\theta}, \qquad \Omega_2 = \dot{\varphi}\sin\theta, \qquad \Omega_3 = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}. \tag{35.3}$$

作为应用欧拉角的一个简单的例子,我们研究对称陀螺的自由运动.

我们取固定坐标系的 Z 轴沿着陀螺的定常动量矩 $\boldsymbol{M}$ 的方向,取动坐标系的 x_3 轴沿着陀螺对称轴,而 x_1 轴在给定时刻与节线重合.利用公式(35.3)可得矢量 $\boldsymbol{M}$ 的分量

$$M_1 = I_1\Omega_1 = I_1\dot{\theta},\ M_2 = I_2\Omega_2 = I_2\dot{\varphi}\sin\theta,\ M_3 = I_3\Omega_3 = I_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}).$$

另一方面,因为 x_1 轴(节线)垂直于 Z 轴,我们有

$$M_1 = 0, \qquad M_2 = M\sin\theta, \qquad M_3 = M\cos\theta.$$

比较这些等式可得下面方程:

$$\dot{\theta} = 0, \quad I_1\dot{\varphi} = M, \quad I_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}) = M\cos\theta. \tag{35.4}$$

第一个方程给出 $\theta = \text{const}$,即陀螺轴与 $\boldsymbol{M}$ 方向的夹角为常数.第二个方程确定进动角速度(根据(33.5)) $\dot{\varphi} = M/I_1$.最后,第三个方程确定陀螺绕自身轴转动的角速度 $\Omega_3 = M\cos\theta/I_3$.

习 题

习题 1 试求解下端点固定的对称重陀螺问题(图 48).

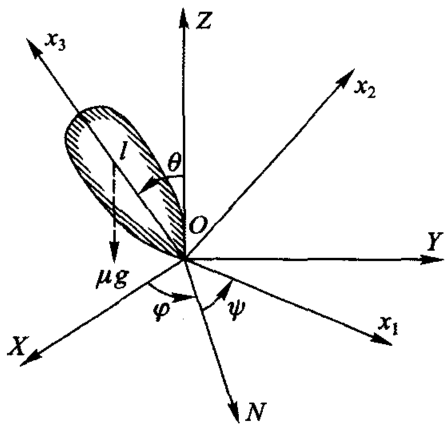


图 48

解:取动坐标系和固定坐标系的原点都在陀螺的固定点 O,而 Z 轴沿着竖直方向(图 48).重力场中陀螺的拉格朗日函数为

$$L = \frac{I_1 + \mu l^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2 - \mu g l\cos\theta$$

(μ 为陀螺的质量,l 是质心到最低点的距离).

ψ 和 φ 是循环坐标.所以有两个运动积分:

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta) = \text{const} \equiv M_3, \tag{1}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = (I_1'\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta)\dot{\varphi} + I_3\dot{\psi}\cos\theta = \text{const} \equiv M_Z, \tag{2}$$

其中引入了记号 $I_1' = I_1 + \mu l^2$（p_ψ 和 p_φ 是相对 O 点定义的转动动量矩在 x_3 轴和 Z 轴上的分量）. 此外还有能量守恒：

$$E = \frac{I_1'}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2 + \mu g l\cos\theta. \tag{3}$$

由方程(1)和(2)求得

$$\dot{\varphi} = \frac{M_Z - M_3\cos\theta}{I_1'\sin^2\theta}, \tag{4}$$

$$\dot{\psi} = \frac{M_3}{I_3} - \cos\theta\frac{M_Z - M_3\cos\theta}{I_1'\sin^2\theta}. \tag{5}$$

利用这些等式从能量(3)中消去$\dot{\varphi}$和$\dot{\psi}$,得

$$E' = \frac{I_1'}{2}\dot{\theta}^2 + U_{\text{eff}}(\theta),$$

其中引入了记号

$$E' = E - \frac{M_3^2}{2I_3} - \mu g l, \qquad U_{\text{eff}}(\theta) = \frac{(M_Z - M_3\cos\theta)^2}{2I_1'\sin^2\theta} - \mu g l(1 - \cos\theta). \tag{6}$$

由此求出$\dot{\theta}$并分离变量得

$$t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{I_1'}[E' - U_{\text{eff}}(\theta)]}} \tag{7}$$

（该积分是椭圆积分）. 然后，利用方程(4)和(5)将 φ 和 ψ 写成 θ 的函数形式.

在运动过程中，角 θ 的变化范围由条件 $E' \geqslant U_{\text{eff}}(\theta)$ 确定. 当 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 时，函数 $U_{\text{eff}}(\theta)$（当 $M_3 \neq M_Z$）趋于 $+\infty$，而当处于 $0, \pi$ 之间时函数经过极小值. 所以方程 $E' = U_{\text{eff}}(\theta)$ 的两个根确定陀螺轴偏离竖直方向的两个极限值 θ_1 和 θ_2.

角 θ 从 θ_1 变化到 θ_2，$\dot{\varphi}$的符号是否改变取决于 $M_Z - M_3\cos\theta$ 的符号是否改变.

在第一种情况下，陀螺轴绕竖直方向单调进动，同时上下振动（称为章动）（图 49a，曲线是陀螺轴在以固定点为球心的球面上所画的轨迹）. 在第二种情况下，在两个极限圆之间进动方向相反，因此陀螺轴绕竖直方向移动时画出环扣（图 49b）. 最后，如果 θ_1 和 θ_2 之中有一个与 $M_Z - M_3\cos\theta$ 的零点重合，则在相应的极限圆上$\dot{\varphi}$和$\dot{\theta}$同时等于零，陀螺轴画出图 49c 类型的轨迹.

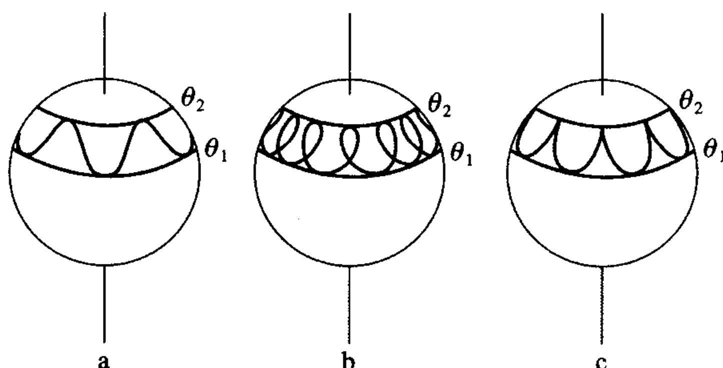


图 49

习题 2 试求陀螺轴绕竖直方向转动稳定的条件.

解:当 $\theta=0$ 时 Z 和 x_3 重合,因此 $M_3=M_Z$, $E'=0$. 如果 $\theta=0$ 相应于 $U_{\text{eff}}(\theta)$的极小值,则陀螺转动稳定. 当 θ 很小时有

$$U_{\text{eff}}\approx\left(\frac{M_3^2}{8I_1'}-\frac{\mu gl}{2}\right)\theta^2,$$

由此可得稳定条件为 $M_3^2>4I_1'\mu gl$ 或者

$$\Omega_3^2>\frac{4I_1'\mu gl}{I_3^2}.$$

习题 3 试求自转动能远大于重力势能情况下陀螺的运动(称为快陀螺).

解:如果忽略重力场,在一阶近似下,陀螺轴绕着 $\boldsymbol{M}$ 自由进动(在这种情况下对应于陀螺章动),根据(33.5),角速度为

$$\Omega_{\text{nut}}=\frac{M}{I_1'}. \tag{1}$$

在高阶近似中会出现 $\boldsymbol{M}$ 绕竖直方向的慢速进动(图 50). 为了求进动角速度,我们将精确运动方程(34.3)

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{K}$$

按章动周期平均. 作用在陀螺上的重力矩等于 $\boldsymbol{K}=\mu l\boldsymbol{n}_3\times\boldsymbol{g}$,其中 $\boldsymbol{n}_3$ 是陀螺轴方向的单位矢量. 由对称性,$\boldsymbol{K}$ 按"章动锥"平均归结为将矢量 $\boldsymbol{n}_3$ 替换为其在 $\boldsymbol{M}$ 方向的投影 $\cos\alpha\boldsymbol{M}/M$($\alpha$ 是 $\boldsymbol{M}$ 与陀螺轴之间的夹角). 于是得方程

$$\overline{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t}}=-\cos\alpha\,\frac{\mu l}{M}\boldsymbol{g}\times\boldsymbol{M}.$$

这就是说,矢量 $\boldsymbol{M}$ 以角速度

$$\overline{\boldsymbol{\Omega}}_{\text{pr}}=-\frac{\mu l\cos\alpha}{M}\boldsymbol{g} \tag{2}$$

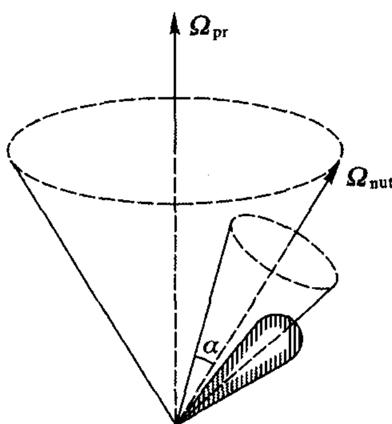


图 50

(比 Ω_{nut} 小)绕 $\boldsymbol{g}$(竖直方向)进动.

在我们所研究的近似中,公式(1)和(2)中的 M 和 $\cos\alpha$ 都是常数(严格地说,不是运动积分).它们与严格的守恒量 E 和 M 之间的关系为

$$M_3 = M\cos\alpha, \qquad E \approx \frac{M^2}{2}\left(\frac{\cos^2\alpha}{I_3} + \frac{\sin^2\alpha}{I_1'}\right).$$

§36　欧拉方程

在§33 中的运动方程是相对固定坐标系的:在方程(34.1)和(34.3)中的导数 $\mathrm{d}\boldsymbol{P}/\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{M}/\mathrm{d}t$ 是矢量 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 相对这个坐标系的改变量.但是,刚体动量矩 $\boldsymbol{M}$ 的分量与角速度分量之间的关系,在与惯性主轴重合的动坐标系中更简单.为了利用这个关系,必须先将运动方程变换到动坐标系.

设 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}/\mathrm{d}t$ 是任意矢量 $\boldsymbol{A}$ 相对固定坐标系的变化速度.如果矢量 $\boldsymbol{A}$ 相对旋转坐标系不变化,则它相对固定坐标系的变化只有转动,于是

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{A}$$

(参见§9,其中证明了公式(9.1)和(9.2)等对任意矢量都成立).一般情况下,这个等式右端应该加入矢量 $\boldsymbol{A}$ 相对动坐标系的变化速度,我们记这个速度为 $\mathrm{d}'\boldsymbol{A}/\mathrm{d}t$,可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{A}. \tag{36.1}$$

利用这个一般公式,我们可以将方程(34.1)和(34.3)写成

$$\frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{P} = \boldsymbol{F}, \qquad \frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{M} = \boldsymbol{K}. \tag{36.2}$$

因为是在动坐标系中对时间的求导,我们可以将这些方程直接向动坐标轴投影:

$$\left(\frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}\right)_1 = \frac{\mathrm{d}P_1}{\mathrm{d}t}, \cdots, \left(\frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t}\right)_1 = \frac{\mathrm{d}M_1}{\mathrm{d}t}, \cdots,$$

其中下标 1,2,3 表示对应坐标轴 x_1, x_2, x_3 的分量. 在第一个方程中用 $\mu\boldsymbol{V}$ 代替 $\boldsymbol{P}$,得

$$\begin{aligned}
\mu\left(\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t}+\Omega_2 V_3-\Omega_3 V_2\right)&=F_1,\\
\mu\left(\frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}t}+\Omega_3 V_1-\Omega_1 V_3\right)&=F_2,\\
\mu\left(\frac{\mathrm{d}V_3}{\mathrm{d}t}+\Omega_1 V_2-\Omega_2 V_1\right)&=F_3.
\end{aligned}\tag{36.3}$$

假设惯性主轴沿 x_1, x_2, x_3,则(36.2)的第二个方程中 $M_1 = I_1\Omega_1$,等等.

$$\begin{aligned}
I_1\frac{\mathrm{d}\Omega_1}{\mathrm{d}t}+(I_3-I_2)\Omega_2\Omega_3&=K_1,\\
I_2\frac{\mathrm{d}\Omega_2}{\mathrm{d}t}+(I_1-I_3)\Omega_3\Omega_1&=K_2,\\
I_3\frac{\mathrm{d}\Omega_3}{\mathrm{d}t}+(I_2-I_1)\Omega_1\Omega_2&=K_3.
\end{aligned}\tag{36.4}$$

方程(36.4)称为*欧拉方程*.

当自由转动时 $\boldsymbol{K}=0$,欧拉方程为

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\Omega_1}{\mathrm{d}t}+\frac{I_3-I_2}{I_1}\Omega_2\Omega_3&=0,\\
\frac{\mathrm{d}\Omega_2}{\mathrm{d}t}+\frac{I_1-I_3}{I_2}\Omega_3\Omega_1&=0,\\
\frac{\mathrm{d}\Omega_3}{\mathrm{d}t}+\frac{I_2-I_1}{I_3}\Omega_1\Omega_2&=0.
\end{aligned}\tag{36.5}$$

作为例子,我们应用这些方程研究对称陀螺的自由转动. 设 $I_1 = I_2$,由第 3 个方程可知,$\dot{\Omega}_3 = 0$,即 $\Omega_3 = \text{const}$. 此后第 1 和第 2 个方程写成

$$\dot{\Omega}_1 = -\omega\Omega_2, \quad \dot{\Omega}_2 = \omega\Omega_1,$$

其中引入了常量

$$\omega = \Omega_3\frac{I_3-I_1}{I_1}. \tag{36.6}$$

将第 2 个方程乘以 i 加上第 1 个方程,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Omega_1+\mathrm{i}\Omega_2)=\mathrm{i}\omega(\Omega_1+\mathrm{i}\Omega_2),$$

由此得

$$\Omega_1+\mathrm{i}\Omega_2 = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},$$

其中 A 为常数,可以认为是实数(只要适当选择时间起始点),那么

$$\Omega_1 = A\cos\omega t, \quad \Omega_2 = A\sin\omega t. \tag{36.7}$$

这个结果表明,角速度在垂直陀螺轴的平面上投影为常量($\sqrt{\Omega_1^2+\Omega_2^2} = A$),并且在该平面内以角速度 ω 旋转.由于在陀螺轴上的投影 Ω_3 也是常量,故矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 的大小不变,并以角速度 ω 绕陀螺轴等速旋转.由于 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}$ 的分量关系为 $M_1 = I_1\Omega_1$, $M_2 = I_2\Omega_2$, $M_3 = I_3\Omega_3$,显然 $\boldsymbol{M}$ 也作这样的运动(相对陀螺).

这里所得的结果是§33 和§35 中相对固定坐标系研究结果的另一种表示.特别地,矢量 $\boldsymbol{M}$(图 48 上 Z 轴)绕 x_3 转动的角速度等于欧拉角表示的角速度 $-\dot{\psi}$.利用方程(35.4)有

$$\dot{\psi} = \frac{M\cos\theta}{I_3} - \dot{\varphi}\cos\theta = M\cos\theta\left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1}\right)$$

或者根据(36.6)有

$$-\dot{\psi} = \Omega_3\frac{I_3 - I_1}{I_1}.$$

§37　非对称陀螺

我们利用欧拉方程研究更复杂的问题,即研究 3 个主转动惯量各不相等的非对称陀螺的转动.假设

$$I_3 > I_2 > I_1. \tag{37.1}$$

我们早就知道欧拉方程的两个积分,分别由能量守恒定律和动量矩守恒定律给出

$$I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2 = 2E,$$
$$I_1^2\Omega_1^2 + I_2^2\Omega_2^2 + I_3^2\Omega_3^2 = M^2, \tag{37.2}$$

其中能量 E 和动量矩的大小 M 是给定常数.这两个等式可以用 $\boldsymbol{M}$ 的分量表示为

$$\frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3} = 2E, \tag{37.3}$$

$$M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = M^2. \tag{37.4}$$

由此可以得出一些陀螺运动的特性.我们注意到,在以 M_1, M_2, M_3 为轴的坐标系中,方程(37.3)和(37.4)分别是半轴为

$$\sqrt{2EI_1}, \quad \sqrt{2EI_2}, \quad \sqrt{2EI_3}$$

的椭球面方程和半径为 M 的球面方程.

当 $\boldsymbol{M}$(相对陀螺的惯性轴)移动时,其端点沿着这两个曲面的交线运动(在图 51 上画出了椭球与不同半径的球面的一系列交线).交线存在的条件是

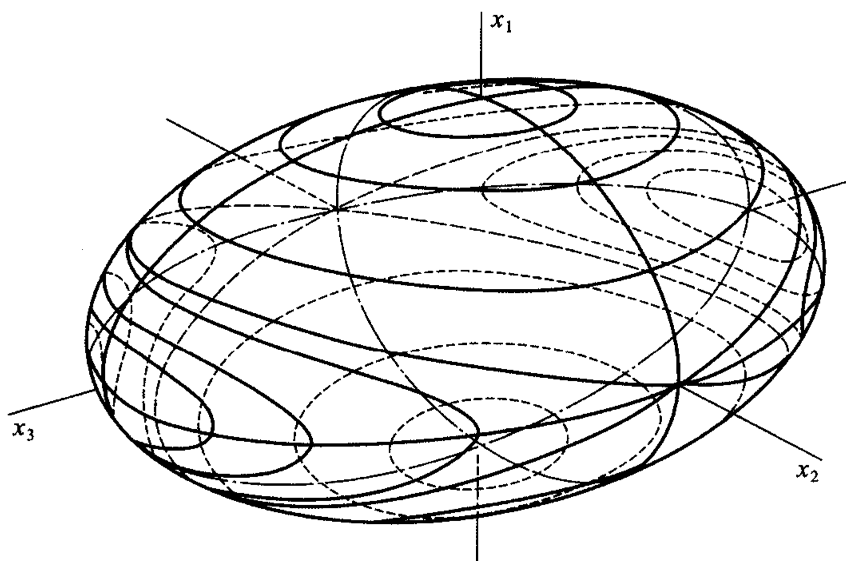


图 51

$$2EI_1 < M^2 < 2EI_3, \tag{37.5}$$

其几何解释为球(37.4)的半径介于椭球(37.3)的长半轴和短半轴之间.

我们研究 M 的变化(给定能量 E)引起矢量 $\boldsymbol{M}$ 端点①的轨迹性质的变化. 当 M^2 略大于 $2EI_1$ 时,球和椭球交于两条很小的封闭曲线,它们在椭球两个极点附近围绕 x_1 轴(当 $M^2 \to 2EI_1$ 时,两条曲线分别收缩到极点). 随着 M^2 继续增大曲线扩大,当 $M^2 = 2EI_2$ 时,曲线变成两条平面曲线(椭圆),并相交于椭球在 x_2 轴上的极点. M^2 再继续增大,重新出现两条分别围绕 x_3 轴上极点的封闭曲线,当 $M^2 \to 2EI_3$ 时,这两条曲线收缩为两个点.

首先应该指出,轨迹的封闭性意味着矢量 $\boldsymbol{M}$ 相对陀螺的运动是周期性的,在一个周期内矢量 $\boldsymbol{M}$ 画出某条圆锥曲线并回到原来位置.

我们进一步发现,在椭球不同极点附近的轨迹有不同的性质. 在 x_1 轴和 x_3 轴附近,轨迹完全分布在极点周围,而在 x_2 轴附近,轨迹将远离极点. 这种不同相应于陀螺绕 3 个轴转动有不同的稳定性. 绕 x_1 轴和 x_3 轴(相应于陀螺 3 个转动惯量中的最大值和最小值)的转动稳定,即偏离这些状态很小时,陀螺将继续在初始状态附近运动. 绕 x_2 轴的转动不稳定,即任意小的偏离都可以产生远离陀螺初始位置的运动.

为了确定 $\boldsymbol{\Omega}$ 的分量(或者平行于它们的 $\boldsymbol{M}$ 的分量)对时间的依赖关系,我们利用欧拉方程(36.5). 利用(37.2)将 Ω_1 和 Ω_3 用 Ω_2 表示:

① 矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 端点画出的类似曲线称为极迹.

$$\Omega_1^2=\frac{1}{I_1(I_3-I_1)}[(2EI_3-M^2)-I_2(I_3-I_2)\Omega_2^2],$$

$$\Omega_3^2=\frac{1}{I_3(I_3-I_1)}[(M^2-2EI_1)-I_2(I_2-I_1)\Omega_2^2], \tag{37.6}$$

并代入(36.5)的第二个方程,得

$$\frac{\mathrm{d}\Omega_2}{\mathrm{d}t}=\frac{I_3-I_1}{I_2}\Omega_1\Omega_3=\frac{1}{I_2\sqrt{I_1I_3}}\{[2EI_3-M^2)-$$

$$I_2(I_3-I_2)\Omega_2^2][(M^2-2EI_1)-I_2(I_2-I_1)\Omega_2^2]\}^{1/2}. \tag{37.7}$$

将这个方程分离变量并积分,得椭圆函数形式的函数 $t(\Omega_2)$. 在化为标准形式时,我们假设

$$M^2>2EI_2$$

(反之,在下面的所有公式中对调下标 1 和 3). 我们用新变量替换 t 和 Ω_2:

$$\tau=t\sqrt{\frac{(I_3-I_2)(M^2-2EI_1)}{I_1I_2I_3}},\quad s=\Omega_2\sqrt{\frac{I_2(I_3-I_2)}{2EI_3-M^2}}, \tag{37.8}$$

并引进正参数 $k^2<1$ 如下:

$$k^2=\frac{(I_2-I_1)(2EI_3-M^2)}{(I_3-I_2)(M^2-2EI_1)}. \tag{37.9}$$

于是有

$$\tau=\int_0^s\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}$$

(选择时间起始点为 $\Omega_2=0$ 时刻). 反解这个积分可得雅可比椭圆函数

$$s=\mathrm{sn}\tau,$$

由此函数给出 Ω_2 对时间的依赖关系. 根据等式(37.6),函数 $\Omega_1(t)$ 和 $\Omega_3(t)$ 可由 $\Omega_2(t)$ 的代数表达式给出. 考虑到另外两个椭圆函数的定义

$$\mathrm{cn}\tau=\sqrt{1-\mathrm{sn}^2\tau},\quad \mathrm{dn}\tau=\sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2\tau},$$

最后可得下面公式:

$$\Omega_1=\sqrt{\frac{2EI_3-M^2}{I_1(I_3-I_1)}}\mathrm{cn}\tau,$$

$$\Omega_2=\sqrt{\frac{2EI_3-M^2}{I_2(I_3-I_2)}}\mathrm{sn}\tau, \tag{37.10}$$

$$\Omega_3=\sqrt{\frac{M^2-2EI_1}{I_3(I_3-I_1)}}\mathrm{dn}\tau.$$

函数(37.10)是周期的,并且对 τ 的周期为 $4K$,其中 K 是第一类全椭圆积分:

$$K=\int_0^1\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-k^2\sin^2u}}. \tag{37.11}$$

对时间的周期为

$$T=4K\sqrt{\frac{I_1I_2I_3}{(I_3-I_2)(M^2-2EI_1)}}. \tag{37.12}$$

经过这段时间后，矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 回到相对陀螺的原位置(这时陀螺自己不会回到相对固定坐标系的原位置，见下面).

当 $I_1=I_2$ 时，公式(37.10)退化为前一节得到的对称陀螺的公式. 事实上，当 $I_1\to I_2$ 时，参数 $k^2\to0$，椭圆函数退化为

$$\mathrm{sn}\tau\to\sin\tau,\quad \mathrm{cn}\tau\to\cos\tau,\quad \mathrm{dn}\tau\to1,$$

于是就退化到公式(36.7).

当 $M^2=2EI_3$ 时有：$\Omega_1=\Omega_2=0,\Omega_3=\mathrm{const}$，即矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 方向总是沿着对称轴 x_3，这相应于陀螺绕 x_3 轴等速转动. 类似地，当 $M^2=2EI_1$ 时(这时 $\tau\equiv0$)，陀螺绕 x_1 轴等速转动.

下面我们研究陀螺在空间中的绝对运动(相对固定坐标系). 为此我们引入陀螺轴 x_1,x_2,x_3 和坐标轴 X,Y,Z 之间的欧拉角 ψ,φ,θ，选择固定轴 Z 沿着常矢量 $\boldsymbol{M}$ 的方向. 由于方向 Z 相对 x_1,x_2,x_3 轴的极角和方位角分别等于 θ 和 $\pi/2-\psi$(参见第 112 页的脚注)，则矢量 $\boldsymbol{M}$ 向 x_1,x_2,x_3 轴投影得

$$\begin{aligned}M\sin\theta\sin\psi&=M_1=I_1\Omega_1,\\ M\sin\theta\cos\psi&=M_2=I_2\Omega_2,\\ M\cos\theta&=M_3=I_3\Omega_3.\end{aligned} \tag{37.13}$$

由此得

$$\cos\theta=\frac{I_3\Omega_3}{M},\quad \tan\psi=\frac{I_1\Omega_1}{I_2\Omega_2}, \tag{37.14}$$

利用公式(37.10)得

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\sqrt{\frac{I_3(M^2-2EI_1)}{M^2(I_3-I_1)}}\mathrm{dn}\tau,\\ \tan\psi&=\sqrt{\frac{I_1(I_3-I_2)}{I_2(I_3-I_1)}}\frac{\mathrm{cn}\tau}{\mathrm{sn}\tau},\end{aligned} \tag{37.15}$$

由此获得角 θ 和 ψ 对时间的依赖关系，与矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 的分量一样，它们是时间的周期为(37.12)的周期函数.

在公式(37.13)中没有角 φ，为了计算这个角，需要利用公式(35.1)，该公式用欧拉角对时间的导数表示 $\boldsymbol{\Omega}$ 的分量. 从等式

$$\Omega_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi,$$

$$\Omega_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi,$$

消去$\dot{\theta}$,可得

$$\dot{\varphi} = \frac{\Omega_1\sin\psi + \Omega_2\cos\varphi}{\sin\theta},$$

然后利用公式(37.13),可得

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = M\frac{I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2}{I_1^2\Omega_1^2 + I_2^2\Omega_2^2}. \tag{37.16}$$

由此可通过积分来确定函数 $\varphi(t)$,但被积表达式很复杂,包括椭圆函数.经过一系列复杂的变换,可以将这个积分表示为 Θ - 函数,我们这里不进行具体计算仅给出最后结果.①

函数 $\varphi(t)$可以写成下面两项之和(精确到可加常数)

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t), \tag{37.17}$$

$\varphi_1(t)$由下式给出:

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi_1(t)} = \frac{\vartheta_{01}(2t/T - \mathrm{i}\alpha)}{\vartheta_{01}(2t/T + \mathrm{i}\alpha)}, \tag{37.18}$$

其中 ϑ_{01}是 Θ - 函数,α 是实常数,α 由下式确定:

$$\mathrm{sn}(\mathrm{i}\cdot 2\alpha K) = \mathrm{i}\sqrt{\frac{I_3(M^2 - 2EI_1)}{I_1(2EI_3 - M^2)}} \tag{37.19}$$

(K 和 T 由公式(37.11)和(37.12)给出).(37.18)右端是周期为 $T/2$ 的周期函数,因此 $\varphi_1(t)$在时间 T 内变化 2π.(37.17)的 $\varphi_2(t)$由下面公式给出:

$$\varphi_2(t) = 2\pi\frac{t}{T'}, \quad \frac{1}{T'} = \frac{M}{2\pi I_1} - \frac{\mathrm{i}}{\pi T}\frac{\vartheta_{01}'(\mathrm{i}\alpha)}{\vartheta_1(\mathrm{i}\alpha)}. \tag{37.20}$$

这个函数在时间 T'内变化量为 2π.

可见,φ 是两个周期函数之和,并且一个的周期(T)与角 ψ 和 θ 的周期相同,另一个的周期(T')与前一个是不可约的.后一种使得陀螺永远不可能回到自己的初始位置.

习　题

习题 1　试求陀螺绕惯性主轴 x_3(或 x_1)附近轴的自由转动.

解:设 x_3 轴靠近 $\boldsymbol{M}$ 的方向.那么分量 M_1 和 M_2 是小量,而 $M_3 \approx M$(精确

① 参见:Е.Т.Уиттекер. Аналитическая динамика. – М.: ОНТИ,1937.

到一阶小量).在这样的精度下,欧拉方程(36.5)的前两个写成

$$\frac{\mathrm{d}M_1}{\mathrm{d}t}=\left(1-\frac{I_3}{I_2}\right)\Omega_0 M_2,\quad \frac{\mathrm{d}M_2}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{I_3}{I_1}-1\right)\Omega_0 M_1,$$

这里我们引入了记号 $\Omega_0=M/I_3$.我们来求 M_1,M_2 的正比于 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 的解,对于频率 ω 可得

$$\omega=\Omega_0\sqrt{\left(\frac{I_3}{I_1}-1\right)\left(\frac{I_3}{I_2}-1\right)}. \tag{1}$$

对于 M_1,M_2,我们有

$$M_1=Ma\sqrt{\frac{I_3}{I_2}-1}\cos\omega t,\quad M_2=Ma\sqrt{\frac{I_3}{I_1}-1}\sin\omega t, \tag{2}$$

其中 a 是任意的小常数.矢量 $\boldsymbol{M}$ 相对陀螺的运动由这些公式确定,在图 51 中矢量 $\boldsymbol{M}$ 的端点(以频率 ω)绕着 x_2 轴上的极点画出小椭圆.

为了确定陀螺在空间中的绝对运动,我们来求其欧拉角.在给定情况下,x_3 和 Z($\boldsymbol{M}$ 的方向)的夹角 θ 是小量,根据公式(37.14)有

$$\tan\psi=\frac{M_1}{M_2},\quad \theta^2\approx 2(1-\cos\theta)=2\left(1-\frac{M_3}{M}\right)\approx\frac{M_1^2+M_2^2}{M^2},$$

将(2)代入,得

$$\tan\psi=\sqrt{\frac{I_1(I_3-I_2)}{I_2(I_3-I_1)}}\cot\omega t,$$

$$\theta^2=a^2\left[\left(\frac{I_3}{I_2}-1\right)\cos^2\omega t+\left(\frac{I_3}{I_1}-1\right)\sin^2\omega t\right]. \tag{3}$$

为了计算角 φ,我们注意到,根据(35.1)中的第 3 个方程,当 $\theta\ll 1$ 时有

$$\Omega_0\approx\Omega_3\approx\dot{\psi}+\dot{\varphi}.$$

所以

$$\varphi=\Omega_0 t-\psi$$

(略去了任意积分常数).

如果直接观察陀螺 3 个惯性主轴的变化(沿着这些轴的单位矢量为 $\boldsymbol{n}_1$,$\boldsymbol{n}_2$,$\boldsymbol{n}_3$),可以获得陀螺运动的直观概念.矢量 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$ 在平面 XY 内以频率 Ω_0 等速转动,同时以频率 ω 沿着横向振动,这些振动由这两个单位矢量的 Z 方向分量确定,对这些分量有

$$n_{1Z}\approx\frac{M_1}{M}=a\sqrt{\frac{I_3}{I_2}-1}\cos\omega t,$$

$$n_{2Z}\approx\frac{M_2}{M}=a\sqrt{\frac{I_3}{I_1}-1}\sin\omega t.$$

在同样精度下，对于矢量 $\boldsymbol{n}_3$ 有

$$n_{3X} \approx \theta \sin\varphi, \quad n_{3Y} \approx -\theta\cos\varphi, \quad n_{3Z} \approx 1$$

（$\boldsymbol{n}_3$ 的方向相对 X, Y, Z 轴的极角和方位角等于 θ 和 $\varphi - \pi/2$，参见第 112 页脚注）.进而有（利用公式(37.13)）：

$$\begin{aligned} n_{3X} &= \theta\sin(\Omega_0 t - \psi) = \theta\sin\Omega_0 t\cos\psi - \theta\cos\Omega_0 t\sin\psi \\ &= \frac{M_2}{M}\sin\Omega_0 t - \frac{M_1}{M}\cos\Omega_0 t \\ &= a\sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1}\sin\Omega_0 t\sin\omega t - a\sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1}\cos\Omega_0 t\cos\omega t, \end{aligned}$$

或者最后得

$$n_{3X} = -\frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} + \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1}\right)\cos[(\Omega_0 + \omega)t] + \frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} - \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1}\right)\cos[(\Omega_0 - \omega)t].$$

类似地，

$$n_{3Y} = -\frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} + \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1}\right)\sin[(\Omega_0 + \omega)t] + \frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} - \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1}\right)\sin[(\Omega_0 - \omega)t].$$

由此可知，矢量 $\boldsymbol{n}_3$ 的运动是以频率$(\Omega_0 \pm \omega)$绕 Z 轴的两个转动合成的.

习题 2 试求 $M^2 = 2EI_2$ 情况下陀螺的自由转动.

解：在图 51 上，这种情况相应于矢量 $\boldsymbol{M}$ 的端点沿着过 x_2 轴极点的曲线运动.

方程(37.7)有如下形式：

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tau} = 1 - s^2, \quad \tau = t\sqrt{\frac{(I_2 - I_1)(I_3 - I_2)}{I_1 I_3}}\Omega_0, \quad s = \frac{\Omega_2}{\Omega_0},$$

其中引入了记号 $\Omega_0 = M/I_2 = 2E/M$. 积分这个方程，然后利用公式(37.6)，可得

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \Omega_0\sqrt{\frac{I_2(I_3 - I_2)}{I_1(I_3 - I_1)}}\,\frac{1}{\cosh\tau}, \\ \Omega_2 &= \Omega_0\tanh\tau, \\ \Omega_3 &= \Omega_0\sqrt{\frac{I_2(I_2 - I_1)}{I_3(I_3 - I_1)}}\,\frac{1}{\cosh\tau}. \end{aligned}$$

为了确定陀螺的绝对运动，我们引入欧拉角，定义 θ 为 Z 轴（$\boldsymbol{M}$ 的方向）与

陀螺惯性主轴 x_2(不是正文中的 x_3)之间的夹角. 在给出矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 的分量与欧拉角关系的公式(37.14)和(37.16)中,将下标循环替换 123→312. 然后将(1)式代入可得

$$\cos\theta=\tanh\tau,\quad \varphi=\Omega_0 t+\text{const},\quad \tan\psi=\sqrt{\frac{I_3(I_2-I_1)}{I_1(I_3-I_2)}}.$$

由所得公式可知,矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 按渐近线(当 $t\to\infty$ 时)趋近于 x_2 轴,同时 x_2 轴按渐近线趋近于固定轴 Z.

§38 刚体接触

由运动方程(34.1)和(34.3)可知,刚体平衡条件是作用在刚体上的力之和等于零,力矩之和也等于零:

$$\boldsymbol{F}=\sum\boldsymbol{f}=0,\quad \boldsymbol{K}=\sum\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}=0. \tag{38.1}$$

这里的求和是对作用在刚体上的所有外力,而 $\boldsymbol{r}$ 是力的作用点的径矢. 这时定义力矩的点(坐标原点)可以任意选择:当 $\boldsymbol{F}=0$ 时,$\boldsymbol{K}$ 不依赖于这个点的选择(参见(34.5)).

如果我们研究两个相互接触的刚体,则平衡条件(38.1)应该对每个刚体成立. 这时外力应该包括作用在给定刚体上的其它与之接触的刚体的作用力. 这些作用在刚体接触点上的力称为*反力*. 显然,两个刚体相互作用的反力大小相等方向相反.

一般情况下,确定反力的大小和方向,需要对所有刚体联合求解平衡方程组(38.1). 在某些情况下,反力的方向可以由问题的条件直接给出. 例如,如果两个刚体可以沿着接触面相互自由滑动,则反力的方向沿着接触面的法线.

如果两个接触刚体相对运动,则除了反力,还有耗散性质的力,即摩擦力.

接触的刚体有两种可能的相对运动:*滑动*和*滚动*. 在滑动时反力垂直于接触面,而摩擦力沿着接触面的切线.

纯滚动的特点是刚体在接触点没有相对运动,换句话说,在每个时刻就像滚动刚体的接触点被固定一样. 这时反力的方向是任意的,即不一定垂直接触面. 滚动摩阻以附加力矩的形式阻碍滚动.

如果滑动时摩擦力足够小,可以忽略,则称刚体接触面*绝对光滑*. 反之,如果接触面的性质决定刚体只能作无滑动的纯滚动,而滚动摩阻可以忽略,则称接触面*绝对粗糙*.

在这两种情况下,摩擦力不出现在刚体运动问题中,因此问题是纯力学的. 如果摩擦的具体性质对运动来说是非常重要的,则运动不是纯力学过程(参见§25).

刚体的接触使它们的自由度比自由运动时有所减少.到目前为止,我们在研究问题时,都要引入与实际自由度相应的坐标.但是,对于刚体的滚动,这样选择坐标可能是行不通的.

刚体滚动的条件是两个刚体上接触点速度相等(例如,刚体沿着静止表面滚动时,接触点速度应该等于零).一般情况下,这个条件表示成约束方程的形式

$$\sum_i c_{\alpha i}\,\dot{q}_i = 0, \qquad (38.2)$$

其中 $c_{\alpha i}$ 只是坐标的函数(下标 α 是约束方程的编号).如果左端不是某个关于坐标函数对时间的全导数,则这些方程是不可积的.换句话说,这些方程不能转化为仅仅是一些坐标之间的关系式,利用这些关系式,可以用与实际自由度相应的较少坐标来描述刚体的位置.这样的约束称为非完整约束(与只是给出坐标之间关系的完整约束相反).

例如,我们研究球沿着平面的滚动.我们用 $\boldsymbol{V}$ 表示平动速度(球心速度),用 $\boldsymbol{\Omega}$ 表示球转动角速度.如果在一般公式 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}$ 中令 $\boldsymbol{r} = -a\boldsymbol{n}$ (a 为球的半径,$\boldsymbol{n}$ 为平面在接触点的法向单位矢量),则可得球与平面接触点的速度.我们要求的约束是在接触点没有滑动的条件,由下面方程给出

$$\boldsymbol{V} - a(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{n}) = 0. \qquad (38.3)$$

这个方程不可积:虽然速度 $\boldsymbol{V}$ 是球心径矢对时间的全导数,但角速度一般情况下不是某个坐标对时间的全导数.因此,(38.3) 是非完整约束①.

由于非完整约束的方程不能用来减少坐标数,所以存在这样的约束就必须使用非全部独立的坐标.为了建立拉格朗日方程,我们重新回到最小作用量原理.

形式为(38.2) 的约束限制坐标变分的可能取值.就是说,在该方程两边乘以 δt,我们可以发现变分 δq_i 不是独立的,它们满足关系式

$$\sum_i c_{\alpha i}\,\delta q_i = 0. \qquad (38.4)$$

在对作用量变分时必须考虑这个关系式.根据求条件极值的拉格朗日方法,应该给作用量变分

$$\delta S = \int \sum_i \delta q_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \mathrm{d}t$$

的被积表达式加上乘以不定乘子(坐标的函数)λ_α 后的方程(38.4),然后令积分等于零.这时可以认为所有变分 δq_i 是独立的,可得方程

---

① 应该指出,对于圆柱,这样的约束是完整的.这时滚动中转动轴的方向在空间保持不变,所以 $\Omega = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ 是圆柱绕自己的中轴转角 φ 对时间的全导数.这时关系式(38.3) 可积,给出球质心坐标与 φ 之间的关系.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=\sum_{\alpha}\lambda_\alpha c_{\alpha i}. \tag{38.5}$$

该方程与约束方程(38.2)一起构成了对于 q_i, λ_α 的封闭方程组.

在上述方法中不出现反力,刚体的接触完全反映在约束方程中.然而,另有一种建立接触刚体运动方程的方法,反力出现在方程中.这种方法(构成了达朗贝尔原理的内容)的实质是对每个刚体写出方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}=\sum \boldsymbol{f},\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t}=\sum \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}, \tag{38.6}$$

并且在作用力 $\boldsymbol{f}$ 中包括反力,这些反力是预先未知的,在求解运动方程时与运动一起确定.这种方法对完整约束和非完整约束同样适用.

习　题

习题 1　均质球在力 $\boldsymbol{F}$ 和力矩 $\boldsymbol{K}$ 作用下,沿着平面滚动,试利用达朗贝尔原理求运动方程.

解:在正文中已经写出约束方程(38.3).引入平面作用在球上的反力(用 $\boldsymbol{R}$ 表示),写出方程(38.6):

$$\mu\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{R}, \tag{1}$$

$$I\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{K}-a(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{R}) \tag{2}$$

(这里考虑了 $\boldsymbol{P}=\mu\boldsymbol{V}$ 以及对于球形陀螺 $\boldsymbol{M}=I\boldsymbol{\Omega}$).将约束方程(38.3)对时间求导,得

$$\dot{\boldsymbol{V}}=a(\dot{\boldsymbol{\Omega}}\times\boldsymbol{n}).$$

代入方程(1)并与方程(2)联立消去 $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$,可得方程

$$\frac{I}{a\mu}(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{R})=\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{n}-a\boldsymbol{R}+a\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{R}).$$

将这个方程写成分量形式并代入 $I=(2/5)\mu a^2$(参见§32 习题 2 的 b),得

$$R_x=\frac{5}{7a}K_y-\frac{2}{7}F_x,\quad R_y=-\frac{5}{7a}K_x-\frac{2}{7}F_y,\quad R_z=-F_z$$

(以滚动平面为 xy 平面).最后,将这些表达式代入方程(1),可得仅包含给定外力和力矩的运动方程

$$\frac{\mathrm{d}V_x}{\mathrm{d}t}=\frac{5}{7\mu}\left(F_x+\frac{K_y}{a}\right),\quad \frac{\mathrm{d}V_y}{\mathrm{d}t}=\frac{5}{7\mu}\left(F_y-\frac{K_x}{a}\right).$$

利用约束方程(38.3),可以将分量 Ω_x, Ω_y 用 V_x, V_y 表示,而对于 Ω_z 有

$$\frac{2}{5}\mu a^2\frac{\mathrm{d}\Omega_z}{\mathrm{d}t}=K_z$$

(方程(2)的 z 方向分量).

习题 2　重为 P 长为 l 的均质杆 BD 靠在墙上,如图 52 所示,其下端 A 用绳 AB 固定.试求支撑点反力和绳的张力.

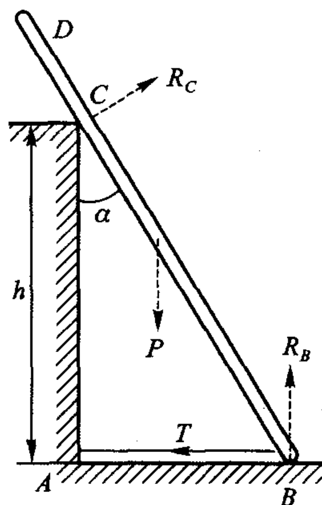


图 52

解:杆的重量体现为作用在杆中点的竖直向下的力 P.反力 R_B,R_C 的方向分别竖直向上和垂直杆,绳张力 T 的方向是从 B 指向 A.解平衡方程可得

$$R_C=\frac{Pl}{4h}\sin2\alpha,\quad R_B=P-R_C\sin\alpha,\quad T=R_C\cos\alpha.$$

习题 3　重为 P 的杆 AB 以两个端点靠在水平面和竖直面上,并用两条水平绳 AD 和 BC 拉着,绳 BC 与杆 AB 位于同一个竖直面内(图 53).试求支撑点反力和绳的张力.

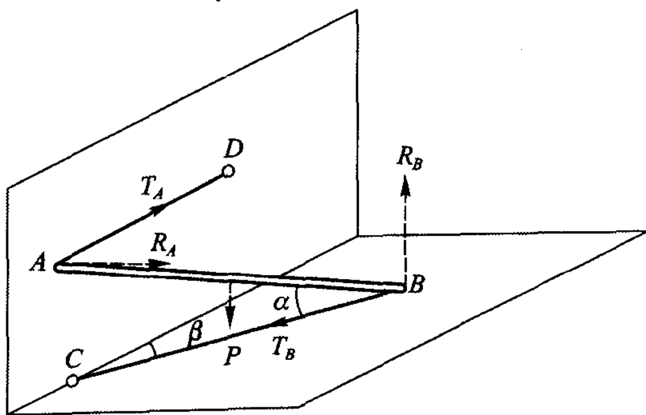


图 53

解:张力 T_A,T_B 的方向分别从 A 到 D 和从 B 到 C.反力 R_A,R_B 分别垂直相应的平面.解平衡方程得

$$R_B=P,\quad T_B=\frac{P}{2}\cot\alpha,$$

$$R_A=T_B\sin\beta,\quad T_A=T_B\cos\beta.$$

习题 4　两根长为 l 的杆上面以铰链相连,下面用绳连接(图 54).在一根杆的中点作用一个力 F(忽略杆的重量).试求反力.

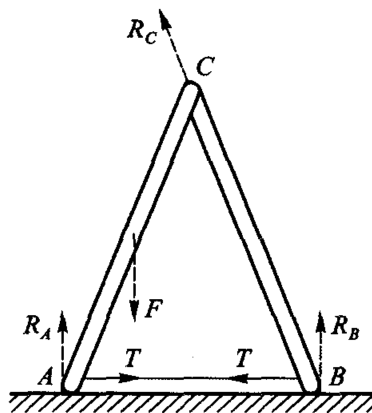


图 54

解:作用在 A 点的张力从 A 指向 B,而作用在 B 点的张力从 B 指向 A.在 A 点和 B 点的反力 T_A 和 T_B 垂直支撑平面.用 R_C 表示铰链作用在 AC 杆

上的反力，则铰链作用在 BC 杆上的反力为 $-R_C$. 根据平衡条件，作用在 BC 杆上的力 R_B，T，$-R_C$ 的力矩之和等于零，由此可知矢量 R_C 的方向沿着 BC. 再利用其它平衡条件（对两根杆的每一根），可得

$$R_A=\frac{3}{4}F,\quad R_B=\frac{F}{4},$$

$$R_C=\frac{F}{4\sin\alpha},\quad T=\frac{1}{4}F\cot\alpha$$

§ 39　非惯性参考系中的运动

到现在为止，我们研究任何系统的运动都是相对惯性参考系的. 例如，对于在外场中运动的质点，在惯性参考系中才有拉格朗日函数

$$L_0=\frac{m\boldsymbol{v}_0^2}{2}-U,\tag{39.1}$$

和相应的运动方程

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}$$

（我们在本节用下标 0 表示在惯性参考系中的物理量）.

现在我们研究在非惯性参考系中质点运动方程的形式. 我们仍以最小作用量原理为出发点，它的应用范围不受参考系选择的限制，同时，拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}=\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}}\tag{39.2}$$

也同样有效. 但拉格朗日函数已经不是(39.1)的形式，为了求得它，需要引入函数 L_0 的变换.

我们分两步进行这个变换. 我们首先研究以速度 $\boldsymbol{V}(t)$ 相对惯性参考系 K_0 运动的参考系 K'. 质点相对参考系 K_0 和 K' 的速度 $\boldsymbol{v}_0$ 和 $\boldsymbol{v}'$ 之间的关系为

$$\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{V}(t).\tag{39.3}$$

将这个等式代入(39.1)，可得在参考系 K' 中的拉格朗日函数

$$L'=\frac{mv'^2}{2}+m\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{V}+\frac{m}{2}\boldsymbol{V}^2-U.$$

但 $V^2(t)$ 是时间的给定函数，可以当作某个函数对时间的全导数，所以上式中第 3 项可以略去. 此外，$\boldsymbol{v}'=\mathrm{d}\boldsymbol{r}'/\mathrm{d}t$，其中 $\boldsymbol{r}'$ 是质点在参考系 K' 中的径矢，所以有

$$m\boldsymbol{V}(t)\cdot\boldsymbol{v}'=m\boldsymbol{V}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{r}')-m\boldsymbol{r}'\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}.$$

代入拉格朗日函数并略去对时间的全导数，可得

$$L'=\frac{mv'^2}{2}-m\boldsymbol{W}(t)\cdot\boldsymbol{r}'-U,\tag{39.4}$$

其中 $\boldsymbol{W}=\mathrm{d}\boldsymbol{V}/\mathrm{d}t$ 是参考系 K′的平动加速度.

利用(39.4)可得拉格朗日方程

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}'}-m\boldsymbol{W}(t). \tag{39.5}$$

可见,加速平动参考系对质点运动方程的影响,等价于一个均匀力场,质点在该场内受力等于质量乘以加速度 $\boldsymbol{W}$,且方向与加速度相反.

下面我们研究另一个参考系 K,与 K′有公共的原点,但是以角速度 $\boldsymbol{\Omega}(t)$转动,相对惯性参考系 K_0,参考系 K 既平动又转动.

质点相对参考系 K′的速度$\boldsymbol{v}'$等于相对参考系 K 的速度$\boldsymbol{v}$ 加上与参考系 K 转动的速度 $\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}$:

$$\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}$$

(质点在参考系 K 和 K′中的径矢$\boldsymbol{r}$ 和$\boldsymbol{r}'$重合).将这个表达式代入拉格朗日函数(39.4),可得

$$L=\frac{mv^2}{2}+m\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})+\frac{m}{2}(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})^2-m\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{r}-U. \tag{39.6}$$

这是在任意非惯性参考系中拉格朗日函数的一般形式.我们注意到,参考系转动导致出现一个特别的项,它对质点速度是线性的.

为了计算拉格朗日方程中的导数,我们写出全微分

$$\begin{aligned}\mathrm{d}L=&m\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v}+m\mathrm{d}\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})+m\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r})+m(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r})-\\&m\boldsymbol{W}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}-\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{r}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=m\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v}+m\mathrm{d}\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})+\\&m\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega})+m[(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{\Omega}]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}-m\boldsymbol{W}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}-\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{r}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}.\end{aligned}$$

合并包含 $\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的项,可得

$$\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{v}}=m\boldsymbol{v}+m(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}),\quad \frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{r}}=m(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega})+m[(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{\Omega}]-m\boldsymbol{W}-\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{r}}.$$

将这些表达式代入(39.2),可得运动方程

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{r}}-m\boldsymbol{W}+m(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{\Omega}})+2m(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega})+m[\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\Omega})]. \tag{39.7}$$

我们发现,因参考系转动产生的“惯性力”由 3 部分组成.力 $m(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{\Omega}})$与非等速转动有关,而其它两个部分在等速转动时也存在.$2m(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega})$称为科里奥利力,与以前研究的所有(非耗散)力不同,它依赖于质点的速度.$m[\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\Omega})]$称为*离心力*.它位于过 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}$ 的平面上,垂直于转动轴(即 $\boldsymbol{\Omega}$ 方向),方向背离转动轴.离心力的大小等于 $m\rho\Omega^2$,其中 ρ 是质点到转动轴的距离.

我们研究参考系没有平动加速度且等速转动的特殊情况.在(39.6)和

(39.7)中令 $\boldsymbol{\Omega}=\text{const}$, $\boldsymbol{W}=0$,可得拉格朗日函数

$$L=\frac{mv^2}{2}+m\,\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})+\frac{m}{2}(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})^2-U \tag{39.8}$$

以及拉格朗日方程

$$m\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}+2m(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega})+m[\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\Omega})]. \tag{39.9}$$

我们计算这时质点的能量.将

$$\boldsymbol{p}=\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}}=m\,\boldsymbol{v}+m(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}) \tag{39.10}$$

代入 $E=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}-L$,可得

$$E=\frac{mv^2}{2}-\frac{m}{2}(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})^2+U. \tag{39.11}$$

应该注意,能量中没有速度的线性项.参考系的转动导致能量中出现仅依赖于坐标且正比于速度平方的附加项.这个附加势能 $-(m/2)(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})^2$ 称为离心势能.

质点相对等速转动参考系的速度 $\boldsymbol{v}$ 与相对惯性参考系的速度 $\boldsymbol{v}_0$ 的关系为

$$\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}. \tag{39.12}$$

所以质点在参考系 K 中的动量 $\boldsymbol{p}$(参见(39.10))等于质点在惯性参考系 K_0 中的动量 $\boldsymbol{p}_0=m\,\boldsymbol{v}_0$.同时相应的动量矩 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{M}_0=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_0$ 也相等.但质点在参考系 K 和 K_0 中的能量不同.由(39.12)求出 $\boldsymbol{v}$ 代入(39.11),可得

$$E=\frac{mv_0^2}{2}-m\,\boldsymbol{v}_0\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})+U=\frac{mv_0^2}{2}+U-m(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}_0)\cdot\boldsymbol{\Omega}.$$

前两项是质点在惯性参考系 K_0 中的能量 E_0.在最后一项中代入动量矩,可得

$$E=E_0-\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{\Omega}. \tag{39.13}$$

这个公式确定了转换到等速转动参考系时的能量变化规律.虽然推导是对一个质点的情况进行的,但是可以直接推广到任意质点系,同样导出公式(39.13).

习　　题

习题 1　试求地球自转(角速度很小)引起自由落体的偏移.

解:在重力场中 $U=-m\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{r}$,其中 $\boldsymbol{g}$ 是重力加速度,在公式(39.9)中忽略包含 $\boldsymbol{\Omega}$ 的平方的离心力,可得运动方程

$$\dot{\boldsymbol{v}}=2\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{g}. \tag{1}$$

用逐阶近似法求解这个方程.为此假设 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$,其中 $\boldsymbol{v}_1$ 是方程 $\dot{\boldsymbol{v}}_1=-\boldsymbol{g}$ 的解,即 $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{g}t+\boldsymbol{v}_0$($\boldsymbol{v}_0$ 是初始速度).将 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$ 代入(1)并将 $\boldsymbol{v}_1$ 留在右端,可得 $\boldsymbol{v}_2$ 的方程

$$\dot{\boldsymbol{v}}_2=2\,\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{\Omega}=2t(\boldsymbol{g}\times\boldsymbol{\Omega})+2\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{\Omega}.$$

积分得

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{h}+\boldsymbol{v}_0t+\frac{\boldsymbol{g}t^2}{2}+\frac{t^3}{3}(\boldsymbol{g}\times\boldsymbol{\Omega})+t^2(\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{\Omega}),\tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{h}$ 是质点的初始位置矢量.

取 z 轴竖直向上,x 轴沿着经线指向极点,那么

$$g_x=g_y=0,\quad g_z=-g,\quad \Omega_x=\Omega\cos\lambda,\quad \Omega_y=0,\quad \Omega_z=\Omega\sin\lambda,$$

其中 λ 是纬度(假设为北纬).在(2)中令 $\boldsymbol{v}_0=0$,得

$$x=0,\quad y=-\frac{t^3}{3}g\Omega\cos\lambda.$$

代入下落时间 $t\approx\sqrt{2h/g}$,最后得

$$x=0,\quad y=-\frac{1}{3}\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}g\Omega\cos\lambda$$

(y 值为负表示向东偏移).

习题 2 试求以初始速度 $\boldsymbol{v}_0$ 从地球表面向上抛出的物体的偏移.

解:设初始速度 $\boldsymbol{v}_0$ 位于 xz 平面内,初始高度为 $h=0$.由方程(2)(习题 1)可得

$$y=-\frac{t^3}{3}g\Omega_x+t^2(\Omega_xv_{0z}-\Omega_zv_{0x}),$$

或者,代入飞行时间 $t\approx 2v_{0z}/g$ 有

$$y=\frac{4v_{0z}^2}{g^2}\left(\frac{1}{3}v_{0z}\Omega_x-v_{0x}\Omega_z\right).$$

习题 3 试确定地球转动对单摆微振动的影响(傅科摆).

解:忽略摆的竖直方向位移这个二阶小量,可以认为运动在 xy 平面内.略去包含 Ω^2 的项,写出运动方程为

$$\ddot{x}+\omega^2x=2\Omega_z\dot{y},\quad \ddot{y}+\omega^2y=-2\Omega_z\dot{x},$$

其中 ω 为不考虑地球转动时摆动频率.将第二个方程乘以 i 加上第一个方程,可得 $\xi=x+\mathrm{i}y$ 的方程

$$\ddot{\xi}+2\mathrm{i}\Omega_z\dot{\xi}+\omega^2\xi=0.$$

当 $\Omega_z\ll\omega$ 时这个方程的解有如下形式:

$$\xi=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega_zt}(A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+A_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})$$

或者

$$x+\mathrm{i}y=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega_zt}(x_0+\mathrm{i}y_0),$$

其中函数 $x_0(t)$,$y_0(t)$给出不考虑地球转动时单摆的轨迹.因此,地球转动的影响是使轨迹绕竖直方向以角速度 Ω_z 转动.

第七章

正则方程

§40 哈密顿方程

利用拉格朗日函数(和由它导出的拉格朗日方程)来研究力学规律,需要给定广义坐标和广义速度来描述系统的力学状态.然而,这种描述不是唯一可能的.利用广义坐标和广义动量来描述系统状态,具有一系列优点,特别是在研究各种力学普遍问题的时候.于是,这就产生了建立与此相应的运动方程的问题.

通过数学上著名的勒让德变换,可以从一组独立变量变换到另一组.在这里给定的情况下,这个变换可概括如下.

拉格朗日函数是坐标和速度的函数,其全微分等于

$$\mathrm{d}L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\mathrm{d}\dot{q}_i.$$

因为按定义 $\partial L/\partial \dot{q}_i$ 是广义动量,又根据拉格朗日方程有 $\partial L/\partial q_i = \dot{p}_i$,所以上面这个表达式可以写成

$$\mathrm{d}L = \sum \dot{p}_i \mathrm{d}q_i + \sum p_i \mathrm{d}\dot{q}_i. \tag{40.1}$$

现在将(40.1)的第二项写成

$$\sum p_i \mathrm{d}\dot{q}_i = \mathrm{d}\left(\sum p_i \dot{q}_i\right) - \sum \dot{q}_i \mathrm{d}p_i,$$

将全微分 $\mathrm{d}\left(\sum p_i \dot{q}_i\right)$ 移到等式左端并改变所有符号,由(40.1)可得

$$\mathrm{d}\left(\sum p_i \dot{q}_i - L\right) = -\sum \dot{p}_i \mathrm{d}q_i + \sum \dot{q}_i \mathrm{d}p_i.$$

微分号下的量是用广义坐标和广义动量表示的系统能量(参见§6),称为系统的哈密顿函数

$$H(p,q,t)=\sum_i p_i\dot{q}_i-L. \tag{40.2}$$

由微分等式

$$\mathrm{d}H=-\sum\dot{p}_i\mathrm{d}q_i+\sum\dot{q}_i\mathrm{d}p_i \tag{40.3}$$

得出方程

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{40.4}$$

这就是用变量 p 和 q 表示的运动方程,称为*哈密顿方程*.它们构成 $2s$ 个未知函数的 $2s$ 个一阶微分方程组,代替拉格朗日方法的 s 个二阶方程.由于这些方程的形式简单并且对称,称之为*正则方程*.

哈密顿函数对时间的全导数为

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial t}+\sum\frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i+\sum\frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i.$$

将方程(40.4)的 $\dot{q}_i$,$\dot{p}_i$ 代入,上式后两项相互抵消,因此

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{40.5}$$

特别地,如果哈密顿函数不显含时间,则 $\mathrm{d}H/\mathrm{d}t=0$,即得到能量守恒定律.

除了动力学变量 $q,\dot{q}$ 或者 q,p,拉格朗日函数和哈密顿函数还包含各种参数,这些参数描述力学系统本身或者外场的性质.设 λ 是这样的参数,我们将它看作变量,则代替表达式(40.1),有

$$\mathrm{d}L=\sum\dot{p}_i\mathrm{d}q_i+\sum p_i\mathrm{d}\dot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial\lambda}\mathrm{d}\lambda,$$

而代替表达式(40.3),有

$$\mathrm{d}H=-\sum\dot{p}_i\mathrm{d}q_i+\sum\dot{q}_i\mathrm{d}p_i-\frac{\partial L}{\partial\lambda}\mathrm{d}\lambda.$$

由此可得拉格朗日函数和哈密顿函数对参数 λ 的偏导数之间的关系

$$\left(\frac{\partial H}{\partial\lambda}\right)_{p,q}=-\left(\frac{\partial L}{\partial\lambda}\right)_{\dot{q},q}, \tag{40.6}$$

下标表示,在对 H 求导时 p,q 是不变的,对 L 求导时 $q,\dot{q}$ 是不变的.

这个结果可以表示为另一种形式.设拉格朗日函数的形式为 $L=L_0+L'$,其中 L' 是基本函数 L_0 很小的附加项.哈密顿函数 $H=H_0+H'$ 的相应附加项与 L' 的关系为

$$(H')_{p,q}=-(L')_{\dot{q},q}. \tag{40.7}$$

可以发现,在从(40.1)到(40.3)的变换中,我们没有写出带 $\mathrm{d}t$ 的项,即没有考虑拉格朗日函数可能显含时间的情况.这是因为在给定情况下时间仅仅是一个参数,与所做的变换无关.类似于公式(40.6),拉格朗日函数和哈密顿函数

对时间的偏导数之间的关系为

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{p,q} = -\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{\dot{q},q}. \tag{40.8}$$

习　　题

习题 1　试用笛卡儿坐标、柱坐标和球坐标表示一个质点的哈密顿函数.

答案:用笛卡儿坐标 x,y,z 表示为

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x,y,z).$$

用柱坐标 r,φ,z 表示为

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2\right) + U(r,\varphi,z).$$

用球坐标 r,θ,φ 表示为

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) + U(r,\theta,\varphi).$$

习题 2　试求质点在等速转动参考系中的哈密顿函数.

解:由(39.10)和(39.11)有

$$H = \frac{p^2}{2m} - \boldsymbol{\Omega}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}) + U.$$

习题 3　设有一个由质量为 M 的质点和 n 个质量为 m 的质点组成的系统,不考虑系统质心的运动,试求这个系统的哈密顿函数(参见 §13 习题).

解:在 §13 习题中得到的拉格朗日函数中,改变 U 前面的符号,可得能量 E.广义动量为

$$\boldsymbol{p}_a = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a} = m\boldsymbol{v}_a - \frac{m^2}{\mu}\sum_a \boldsymbol{v}_a.$$

由此得

$$\sum \boldsymbol{p}_a = m\sum \boldsymbol{v}_a - \frac{nm^2}{\mu}\sum_a \boldsymbol{v}_a = \frac{mM}{\mu}\sum_a \boldsymbol{v}_a,$$

$$\boldsymbol{v}_a = \frac{\boldsymbol{p}_a}{m} + \frac{1}{M}\sum \boldsymbol{p}_a.$$

代入 E,可得

$$H = \frac{1}{2m}\sum_a \boldsymbol{p}_a^2 + \frac{1}{2M}\left(\sum_a \boldsymbol{p}_a\right)^2 + U.$$

§41　罗斯函数

在某些情况下,需要在变换中用新变量代替部分广义动量而非全部.相应的变换类似前一节.

为了书写公式简便，首先假设总共有两个广义坐标，用 q 和 ξ 表示，我们进行从 $q,\xi,\dot{q},\dot{\xi}$ 到 $q,\xi,p,\dot{\xi}$ 的变换，其中 p 为相应于广义坐标 q 的广义动量.

拉格朗日函数 $L(q,\xi,\dot{q},\dot{\xi})$ 的微分为

$$\mathrm{d}L=\frac{\partial L}{\partial q}\mathrm{d}q+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\mathrm{d}\,\dot{q}+\frac{\partial L}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi+\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}\mathrm{d}\,\dot{\xi}=\dot{p}\mathrm{d}q+p\mathrm{d}\,\dot{q}+\frac{\partial L}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi+\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}\mathrm{d}\,\dot{\xi},$$

由此可得

$$\mathrm{d}(L-p\dot{q})=\dot{p}\mathrm{d}q-\dot{q}\mathrm{d}p+\frac{\partial L}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi+\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}\mathrm{d}\dot{\xi}.$$

引入函数(称为罗斯函数)

$$R(q,p,\xi,\dot{\xi})=p\dot{q}-L, \tag{41.1}$$

式中的速度 $\dot{q}$ 借助等式 $p=\partial L/\partial\dot{q}$ 用广义动量 p 表示. 罗斯函数的微分为

$$\mathrm{d}R=-\dot{p}\mathrm{d}q+\dot{q}\mathrm{d}p-\frac{\partial L}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi-\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}\mathrm{d}\,\dot{\xi}. \tag{41.2}$$

由此可得

$$\dot{q}=\frac{\partial R}{\partial p},\quad \dot{p}=-\frac{\partial R}{\partial q}, \tag{41.3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi}=-\frac{\partial R}{\partial \xi},\quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}=-\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}}. \tag{41.4}$$

将后两个等式代入变量 ξ 的拉格朗日方程，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}}=\frac{\partial R}{\partial \xi}. \tag{41.5}$$

可见，罗斯函数对于坐标 q 是哈密顿函数(方程(41.3))，对于坐标 ξ 是拉格朗日函数(方程(41.5)).

根据系统能量的定义

$$E=\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}+\dot{\xi}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}-L=p\dot{q}+\dot{\xi}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}-L.$$

将(41.1)和(41.4)代入，能量可以用罗斯函数表示为

$$E=R-\dot{\xi}\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}}. \tag{41.6}$$

显然，我们得到的这些公式可以推广到有多个坐标 q 和 ξ 的情况.

罗斯函数是非常有用的，特别是存在循环坐标的时候. 如果 q 是循环坐标，则它不显含在拉格朗日函数中，也不显含于罗斯函数，所以罗斯函数仅是变量 $p,\xi,\dot{\xi}$ 的函数. 而相应于循环坐标的广义动量 p 为常数(也可以从(41.3)的第

二个方程得出,从这个意义上讲,这个方程不能给出任何新的结果).将 p 替换为给定常值后,方程(41.5)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial R(p,\xi,\dot{\xi})}{\partial\dot{\xi}}=\frac{\partial R(p,\xi,\dot{\xi})}{\partial\xi}$$

仅包含坐标 ξ,循环坐标完全被消去.如果这些方程可以求解并得到函数 $\xi(t)$,则代入方程

$$\dot{q}=\frac{\partial R(p,\xi,\dot{\xi})}{\partial p}$$

的右端,可以直接积分求出函数 $q(t)$.

习　　题

习题　试消去循环坐标 ψ(ψ,φ,θ 是欧拉角),求对称陀螺在外力场 $U(\varphi,\theta)$中的罗斯函数.

解:拉格朗日函数

$$L=\frac{I_1'}{2}(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+\frac{I_3}{2}(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)^2-U(\varphi,\theta)$$

(参见§35 的习题 1).罗斯函数为

$$R=p_\psi\dot{\psi}-L=\frac{p_\psi^2}{2I_3}-p_\psi\dot{\varphi}\cos\theta-\frac{I_1'}{2}(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+U(\varphi,\theta),$$

第一项是常数,可以略去.

§ 42　泊松括号

设 $f(p,q,t)$是坐标、动量和时间的某个函数.它对时间的全导数为

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_k\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial f}{\partial p_k}\dot{p}_k\right).$$

代入由哈密顿方程(40.4)给出的$\dot{q}_k,\dot{p}_k$ 的表达式,得

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial t}+\{H,f\},\tag{42.1}$$

其中引入了记号

$$\{H,f\}=\sum_k\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial q_k}-\frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial p_k}\right).\tag{42.2}$$

表达式(42.2)称为 H 和 f 的泊松括号.

我们知道,如果动力学变量的某个函数当系统运动时保持不变,则称之为运动积分.由(42.1)可知,f 是运动积分($\mathrm{d}f/\mathrm{d}t=0$)的条件是

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\{H,f\}=0.\tag{42.3}$$

如果运动积分不显含时间,则

$$\{H, f\} = 0, \tag{42.4}$$

即 f 和哈密顿函数的泊松括号等于零.

对于任意一对变量 f, g,泊松括号可以类似地定义为

$$\{f, g\} = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right). \tag{42.5}$$

由定义容易推出泊松括号的如下性质.

如果两个函数对调,则泊松括号改变符号;如果一个函数是常数(c),则泊松括号等于零:

$$\{f, g\} = -\{g, f\}, \tag{42.6}$$

$$\{f, c\} = 0. \tag{42.7}$$

其次,还有

$$\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\}, \tag{42.8}$$

$$\{f_1 f_2, g\} = f_1\{f_2, g\} + f_2\{f_1, g\}. \tag{42.9}$$

将(42.5)对时间求偏导数有

$$\frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\}. \tag{42.10}$$

如果函数 f 或 g 之一是广义坐标或者广义动量,则泊松括号变为简单的偏导数形式:

$$\{f, q_k\} = \frac{\partial f}{\partial p_k}, \tag{42.11}$$

$$\{f, p_k\} = -\frac{\partial f}{\partial q_k}, \tag{42.12}$$

例如,在(42.5)中令 $g = q_k$,就可以得到公式(42.11),由于

$$\frac{\partial q_k}{\partial q_l} = \delta_{kl}, \quad \frac{\partial q_k}{\partial p_l} = 0,$$

这时求和只剩下一项.特别地,在(42.11)和(42.12)中令函数 f 等于 q_i 和 p_i,可得

$$\{q_i, q_k\} = 0, \quad \{p_i, p_k\} = 0, \quad \{p_i, q_k\} = \delta_{ik}. \tag{42.13}$$

在3个函数组成的泊松括号之间,存在下面关系式

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0, \tag{42.14}$$

我们称之为雅可比恒等式.

为了证明这个恒等式,我们来研究下面的情况.根据定义(42.5),泊松括号 $\{f, g\}$ 是 f 和 g 的一阶导数的双线性齐次函数.所以,例如,$\{h, \{f, g\}\}$ 是 f 和 g

的二阶导数的线性齐次函数.而等式(42.14)的整个左端是所有3个函数f,g,h的二阶导数的线性齐次函数.我们将含有f的二阶导数的项放在一起.第一个括号不含这样的项,它是f的一阶导数的函数.我们引入线性微分算子D_1和D_2

$$D_1(\varphi)=\{g,\varphi\},\quad D_2(\varphi)=\{h,\varphi\},$$

将第2和第3个括号之和象征性地写出来.于是,

$$\begin{aligned}\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\} &= \{g,\{h,f\}\}-\{h,\{g,f\}\}\\ &= D_1(D_2(f))-D_2(D_1(f))\\ &= (D_1D_2-D_2D_1)f.\end{aligned}$$

容易看出,微分算子这样的线性组合不可能包含f的二阶导数.事实上,线性微分算子的一般形式为

$$D_1=\sum_k\xi_k\frac{\partial}{\partial x_k},\quad D_2=\sum_k\eta_k\frac{\partial}{\partial x_k},$$

其中ξ_k,η_k是变量$x_1,x_2,\cdots$的任意函数.于是

$$D_1D_2=\sum_{k,l}\xi_k\eta_l\frac{\partial^2}{\partial x_kx_l}+\sum_{k,l}\xi_k\frac{\partial\eta_l}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_l},$$

$$D_2D_1=\sum_{k,l}\eta_k\xi_l\frac{\partial^2}{\partial x_kx_l}+\sum_{k,l}\eta_k\frac{\partial\xi_l}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_l},$$

它们之差

$$D_1D_2-D_2D_1=\sum_{k,l}\left(\xi_k\frac{\partial\eta_l}{\partial x_k}-\eta_k\frac{\partial\xi_l}{\partial x_k}\right)\frac{\partial}{\partial x_l}$$

是仅包含一阶导数的算子.于是,在(42.14)的左端,所有包含f的二阶导数的项相互抵消,对于g和h也是一样,因此恒等式成立.

泊松括号的重要性在于,如果f和g是两个运动积分,则它们构成的泊松括号也是运动积分

$$\{f,g\}=\text{const}\tag{42.15}$$

(称为泊松定理).

如果f和g不显含时间,这个定理的证明非常简单.在雅可比恒等式中令$h=H$,得

$$\{f,\{g,H\}\}+\{g,\{H,f\}\}+\{H,\{f,g\}\}=0.$$

由此可见,如果有$\{H,g\}=0$和$\{H,f\}=0$,则$\{H,\{f,g\}\}=0$,于是结论得证.

如果f和g显含时间,则在(42.1)的基础上可以写出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{f,g\}=\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\}+\{H,\{f,g\}\}.$$

利用公式(42.10),借助雅可比恒等式将$\{H,\{f,g\}\}$用另外两项代替,可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{f,g\}=\left\{\frac{\partial f}{\partial t},g\right\}+\left\{f,\frac{\partial g}{\partial t}\right\}-\{f,\{g,H\}\}-\{g,\{H,f\}\}$$

$$= \left\{\frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t} + \{H, g\}\right\}$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{f, g\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\}, \tag{42.16}$$

由此显然可以证明一般情况下的泊松定理.

当然,应用泊松定理,我们不是总能得到新的运动积分,因为运动积分的数量是有限的($2s-1$,其中 s 是自由度). 在某些情况下,我们可能得到毫无意义的结果,即泊松括号化为常数. 在另外一些情况下,新得到的运动积分只是原来的运动积分 f 和 g 的函数. 如果不是上述两种情况,则泊松括号给出新的运动积分.

习　　题

习题 1　试求质点的动量 $\boldsymbol{p}$ 和动量矩 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ 的笛卡儿坐标分量组成的泊松括号.

解:根据公式(42.12)得

$$\{M_x, p_y\} = -\frac{\partial M_x}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}(yp_z - zp_y) = -p_z$$

和类似的两个公式

$$\{M_x, p_x\} = 0, \quad \{M_x, p_z\} = p_y.$$

其它的泊松括号可以通过下标 x, y, z 的循环替换得到.

习题 2　试求动量矩 $\boldsymbol{M}$ 的分量组成的泊松括号.

解:直接由公式(42.5)计算得

$$\{M_x, M_y\} = -M_z, \quad \{M_y, M_z\} = -M_x, \quad \{M_z, M_x\} = -M_y.$$

因为不同质点的坐标和动量是相互独立的变量,所以在习题 1 和 2 中所得的公式对于任意质点系的动量和动量矩也成立.

习题 3　试证

$$\{\varphi, M_z\} = 0,$$

其中 φ 是质点坐标和动量的任意标量函数.

证:标量函数只能以 $r^2, p^2, \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}$ 的组合形式依赖于矢量 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 的分量. 所以

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{r}} = 2\frac{\partial \varphi}{\partial (r^2)}\boldsymbol{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})}\boldsymbol{p}$$

对 $\partial\varphi/\partial\boldsymbol{p}$ 也类似. 利用这些微分规则,按公式(42.5)直接验算即可得要证的结论.

习题 4　试证

$$\{\boldsymbol{f}, M_z\} = \boldsymbol{f} \times \boldsymbol{n},$$

其中 $\boldsymbol{f}$ 是质点坐标和动量的矢量函数,而 $\boldsymbol{n}$ 是沿着 z 方向的单位矢量.

证:任意矢量 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$ 可以写成

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{r}\varphi_1 + \boldsymbol{p}\varphi_2 + (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p})\varphi_3,$$

其中 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ 是标量函数. 利用公式(42.9)、(42.11)、(42.12) 和习题 3 给出的公式,直接验算即可得要证的结论.

§ 43　作为坐标函数的作用量

在给出最小作用量原理时,我们研究过沿着两个给定位置 $q^{(1)}$ 和 $q^{(2)}$ 之间轨迹的积分

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t, \tag{43.1}$$

其中 $q^{(1)}$ 和 $q^{(2)}$ 是在给定时刻 t_1 和 t_2 系统的位置. 在作用量变分时,比较有相同值 $q(t_1)$ 和 $q(t_2)$ 的临近轨迹上这个积分值. 这些轨迹中只有一条对应真实运动,这就是使积分 S 取极小值的轨迹.

下面我们从另一个角度研究作用量的概念. 我们将 S 看作描述沿着真实轨迹运动的特征量,并比较有相同初始位置 $q(t_1) = q^{(1)}$ 但 t_2 时刻通过不同位置的轨迹上的值. 换句话说,我们将真实轨迹的作用量积分看作积分上限中坐标值的函数.

从一条轨迹到相邻其它轨迹的变换,使作用量产生的改变量由下面表达式给出(当有一个自由度时):

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q\mathrm{d}t.$$

因为实际运动轨迹满足拉格朗日方程,故这个式子中积分等于零. 在第一项假设在积分下限 $\delta q(t_1) = 0$, 而将 $\delta q(t_2)$ 简记为 δq. 将 $\partial L/\partial \dot{q}$ 替换为 p,最后可得: $\delta S = p\delta q$ 或者在任意自由度情况下写成

$$\delta S = \sum_i p_i \delta q_i. \tag{43.2}$$

由此式可知,作用量对坐标的偏导数等于相应的动量

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i. \tag{43.3}$$

类似地,当我们研究 t_1 时刻位置同为 $q^{(1)}$ 但 $t_2 = t$ 时刻通过不同位置 $q^{(2)}$ 的轨迹时,可以将作用量看作时间的显函数. 在这个意义下偏导数 $\partial S/\partial t$ 可以通过相应积分的变分求得. 但是,借助公式(43.3),用下面的方法会更简单.

根据作用量的定义,它沿着轨迹对时间的全导数等于

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = L. \tag{43.4}$$

从另一方面,在上述意义下将 S 看作坐标和时间的函数,利用公式(43.3),有

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\partial S}{\partial t}+\sum_i\frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i=\frac{\partial S}{\partial t}+\sum_i p_i\dot{q}_i.$$

比较两个表达式,可得

$$\frac{dS}{dt}=L-\sum_i p_i\dot{q}_i$$

或者

$$\frac{dS}{dt}=-H. \tag{43.5}$$

公式(43.3)和(43.5)可以一起写成作用量的全微分的表达式

$$dS=\sum_i p_i dq_i-Hdt, \tag{43.6}$$

其中作用量看作(43.1)积分上限中坐标和时间的函数.下面假设不仅运动的终点而且初始点的坐标和时间都变化.显然,S 相应的变化将由表达式(43.6)在两端点的差值给出,即

$$dS=\sum_i p_i^{(2)}dq_i^{(2)}-H^{(2)}dt^{(2)}-\sum_i p_i^{(1)}dq_i^{(1)}+H^{(1)}dt^{(1)}. \tag{43.7}$$

这个关系式表明,在运动过程中无论外部对系统的作用如何,终点运动状态都不可能是初运动状态的任意函数,只有(43.7)右端表达式是全微分的那些运动才是可能的.于是,与拉格朗日函数具体形式无关的最小作用量原理,给出可能运动集合的一定限制.例如,对于从空间某个点发出的粒子束,可以建立一系列一般的运动规律(不依赖于现有外场的形式).研究这些规律的学科称为几何光学①.

应该指出,如果将坐标和动量看作独立变分的变量,并在(43.6)基础上,将作用量写成积分形式

$$S=\int\left(\sum_i p_i dq_i-Hdt\right), \tag{43.8}$$

则可以由最小作用量原理推导出哈密顿方程.为了书写简便,我们还是假设只有一个坐标(和一个动量),写出作用量的变分

$$\delta S=\int\left(\delta p dq+p d\delta q-\frac{\partial H}{\partial q}\delta q dt-\frac{\partial H}{\partial p}\delta p dt\right).$$

变换第二项(分部积分)给出

$$\delta S=\int\delta p\left(dq-\frac{\partial H}{\partial p}dt\right)+p\delta q\Big|-\int\delta q\left(dp+\frac{\partial H}{\partial q}dt\right).$$

在积分限上应该令 $\delta q=0$,这样被积分出来的项就消去了.只有在被积表达式都等于零的条件下,剩下的表达式才能对任意独立的 δq 和 δp 都等于零.于是有

$$dq=\frac{\partial H}{\partial p}dt,\quad dp=-\frac{\partial H}{\partial q}dt,$$

① 参见《场论》,第七章.

除以 $\mathrm{d}t$ 后可得哈密顿方程.

§ 44 莫培督原理

力学系统的运动完全由最小作用量原理确定:通过求解由该原理导出的运动方程,可以得到轨迹的形式以及在轨迹上位置对时间的依赖关系.

如果我们限制在确定运动轨迹的问题上(暂时不考虑时间的问题),则可以为此建立更简单的最小作用量原理.

假设拉格朗日函数和哈密顿函数不显含时间,系统能量守恒:

$$H(p,q) = E = \text{const}.$$

根据最小作用量原理,对于给定坐标和时间的初值和终值,作用量变分等于零.如果在固定坐标的初值和终值情况下,允许终止时间 t 变分,则有(参见(43.7))

$$\delta S = -H\delta t. \tag{44.1}$$

我们不比较系统全部的虚运动,而只是比较满足能量守恒定律的那些.对于这样的轨迹,我们可以在(44.1)中将 H 代替为常数 E,给出

$$\delta S + E\mathrm{d}t = 0. \tag{44.2}$$

写出(43.8)形式的作用量并将 H 代替为常数 E,有

$$S = \int \sum_i p_i \mathrm{d}q_i - E(t - t_0). \tag{44.3}$$

这个式子中的第一项

$$S_0 = \int \sum_i p_i \mathrm{d}q_i \tag{44.4}$$

有时也称为*缩短作用量*.将(44.3)代入(44.2),得

$$\delta S_0 = 0. \tag{44.5}$$

可见,缩短作用量对于所有满足能量守恒定律且在任意时刻通过终点的轨迹有极小值.为了利用这个变分原理,必须预先用坐标 q 及其微分 $\mathrm{d}q$ 表示出动量和(44.4)所有被积表达式.为此需要利用动量的定义式

$$p_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L\left(q, \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right) \tag{44.6}$$

以及能量守恒方程

$$E\left(q, \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right) = E. \tag{44.7}$$

利用公式(44.7),用坐标 q 及其微分 $\mathrm{d}q$ 表示 $\mathrm{d}t$ 并代入公式(44.6),那么我们就用坐标 q 及其微分 $\mathrm{d}q$ 表示出动量,并且以能量 E 作为参数.这样得到的变分原理可以确定系统的轨迹,这个原理通常称为*莫培督原理*(尽管它的精确定义由欧拉和拉格朗日给出).

对于通常形式为动能与势能之差的拉格朗日函数

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i,k}a_{ik}(q)\,\dot{q}_i\,\dot{q}_k-U(q),$$

我们推导上述作用量的显式.这时动量为

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}=\sum_k a_{ik}(q)\,\dot{q}_k,$$

而能量为

$$E=\frac{1}{2}\sum_{i,k}a_{ik}(q)\,\dot{q}_i\,\dot{q}_k+U(q).$$

由上式可得

$$\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{\sum a_{ik}\mathrm{d}q_i\mathrm{d}q_k}{2(E-U)}},\tag{44.8}$$

将这个表达式代入

$$\sum_i p_i\mathrm{d}q_i=\sum_{i,k}a_{ik}\frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}q_i,$$

可得缩短作用量为

$$S_0=\int\sqrt{2(E-U)\sum_{i,k}a_{ik}\mathrm{d}q_i\mathrm{d}q_k}.\tag{44.9}$$

特别地,对于一个质点,动能为

$$T=\frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^2,$$

其中 m 为质点的质量,而 $\mathrm{d}l$ 是轨迹的微元,确定轨迹形式的变分原理为

$$\delta\int\sqrt{2m(E-U)}\mathrm{d}l=0,\tag{44.10}$$

这是在空间中两个给定点之间积分.这个形式由雅可比提出.

对于自由运动质点,$U=0$,(44.10) 给出

$$\delta\int\mathrm{d}l=0,$$

即质点沿着最短路径 —— 直线运动.

我们再回到作用量表达式(44.3),这次对参数 E 变分:

$$\delta S=\frac{\partial S_0}{\partial E}\delta E-(t-t_0)\delta E-E\delta t.$$

将此式代入(44.2),得

$$\frac{\partial S_0}{\partial E}=t-t_0.\tag{44.11}$$

对于形式为(44.9) 的缩短作用量,这个等式变为

$$\int\sqrt{\frac{\sum a_{ik}\mathrm{d}q_i\mathrm{d}q_k}{2(E-U)}}=t-t_0.\tag{44.12}$$

这正是方程(44.8) 的积分.它与轨迹方程一起完全确定系统的运动.

习　　题

习题　试由变分原理(44.10)推导出轨迹的微分方程.

解:进行变分有

$$\delta\int\sqrt{2m(E-U)}\mathrm{d}l=-\int\left(\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\frac{\delta\boldsymbol{r}}{2\sqrt{E-U}}\mathrm{d}l-\sqrt{E-U}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}l}\cdot\mathrm{d}\delta\boldsymbol{r}\right).$$

在第二项中考虑到 $\mathrm{d}l^2=\mathrm{d}\boldsymbol{r}^2$,因此 $\mathrm{d}l\mathrm{d}\delta l=\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\delta\boldsymbol{r}$. 将这一项分部积分然后令被积表达式中 $\delta\boldsymbol{r}$ 的系数等于零,得轨迹的微分方程

$$2\sqrt{E-U}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(\sqrt{E-U}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}l}\right)=-\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{r}}.$$

计算方程左端的导数并引入力 $\boldsymbol{F}=-\partial U/\partial\boldsymbol{r}$,可将方程写成

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\boldsymbol{F}-(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t})\boldsymbol{t}}{2(E-U)},$$

其中 $\boldsymbol{t}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}l$ 是轨迹切向单位矢量,而 $\boldsymbol{F}-(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t})\boldsymbol{t}$ 是力在轨迹法线方向的分量 $\boldsymbol{F}_n$. 由微分几何可知,$\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t^2=\mathrm{d}\boldsymbol{t}/\mathrm{d}l$ 等于 $\boldsymbol{n}/R$,其中 R 为轨迹的曲率半径,而 $\boldsymbol{n}$ 是轨迹主法线方向单位矢量. 将 $E-U$ 替换为 $mv^2/2$,得

$$\boldsymbol{n}\frac{mv^2}{R}=\boldsymbol{F}_n,$$

这与曲线运动法向加速度公式相符.

§45　正则变换

广义坐标 q 的选择不受任何条件的限制,它们可以是任意单值确定系统在空间中位置的 s 个量. 拉格朗日方程(2.6)的形式不依赖于这种选择,在这个意义下,可以说拉格朗日方程对于从广义坐标 $q_1,q_2,\cdots$ 到另外的独立变量 Q_1, $Q_2,\cdots$ 的变换具有不变性. 新坐标 Q 是老坐标 q 的函数,并且可以使它们的关系式显含时间,即有形式为

$$Q_i=Q_i(q,t)\tag{45.1}$$

的变换(有时称为点变换).

除了拉格朗日方程,显然哈密顿方程(40.4)在变换(45.1)下也保持形式不变. 然而,哈密顿方程实际上允许有很多类型的变换. 自然这是因为在哈密顿方法中动量 p 与坐标 q 都是平等的独立变量. 所以,变换的概念可以推广,包括从 $2s$ 个独立变量 p 和 q 到新变量 P 和 Q 的变换,即

$$Q_i=Q_i(p,q,t),\quad P_i=P_i(p,q,t).\tag{45.2}$$

这样变换种类的推广是力学的哈密顿方法的本质优点之一.

然而不是说,在形式为(45.2)的任意变换下,运动方程都保持自己的正则形

式.下面我们研究变换满足什么条件,才可以使新变量 P, Q 表示的运动方程具有如下形式:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}, \tag{45.3}$$

其中 $H'(P, Q)$ 是新的哈密顿函数.在这样的变换中特别重要的一类称为正则变换.

可用如下步骤得到正则变换的公式.在§43结尾处已经证明,哈密顿方程可以由下面形式的最小作用量原理推得:

$$\delta\int\Big(\sum_i p_i \mathrm{d}q_i - H\mathrm{d}t\Big) = 0 \tag{45.4}$$

(并且所有坐标和动量都独立变分).为使新变量 P 和 Q 也满足哈密顿方程,对于新变量,最小作用量原理也应该成立:

$$\delta\int\Big(\sum_i P_i \mathrm{d}Q_i - H'\mathrm{d}t\Big) = 0. \tag{45.5}$$

但(45.4)和(45.5)等效的条件是它们被积表达式仅相差某个关于坐标、动量和时间的任意函数 F 的全微分,这时两个积分之差为在变分时不起作用的常数(F 在两个积分限上的差).由此可见,应该有

$$\sum_i p_i \mathrm{d}q_i - H\mathrm{d}t = \sum_i P_i \mathrm{d}Q_i - H'\mathrm{d}t + \mathrm{d}F.$$

满足这些要求的变换称为正则变换①.任何正则变换都由自己的母函数 F 来描述.

将所得关系式重新写成

$$\mathrm{d}F = \sum_i p_i \mathrm{d}q_i - \sum_i P_i \mathrm{d}Q_i + (H' - H)\mathrm{d}t, \tag{45.6}$$

可以看出,

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}, \tag{45.7}$$

这时假设母函数是新、老坐标(和时间)的给定函数:$F = F(q, Q, t)$.在给定函数 F 时,公式(45.7)给出了老变量(p, q)和新变量(P, Q)的关系,同时还给出新的哈密顿函数.

不用变量 q, Q 表示母函数,而是用老坐标 q 和新动量 P 表示,可能会更方便.为了推导这种情况下的正则变换公式,需要在关系式(45.6)中进行相应的勒让德变换.就是说,将该关系式重新写成

$$\mathrm{d}\Big(F + \sum_i P_i Q_i\Big) = \sum_i p_i \mathrm{d}q_i + \sum_i Q_i \mathrm{d}P_i + (H' - H)\mathrm{d}t.$$

---

① 除了正则变换,(45.4)和(45.5)的被积表达式相差常数乘子时,变换也保持运动方程的正则形式.例如下面形式的变换:$P_i = ap_i$, $Q_i = q_i$, $H' = aH$,其中 a 为任意常数.

等式左端微分号后面的表达式用变量 q,P 表示,是新的母函数.用 $\Phi(q,P,t)$ 表示这个母函数,于是有[①]

$$p_i=\frac{\partial\Phi}{\partial q_i},\quad Q_i=\frac{\partial\Phi}{\partial P_i},\quad H'=H+\frac{\partial\Phi}{\partial t}.\tag{45.8}$$

类似地,可以得到由依赖于变量 p,Q 或者 p,P 的母函数生成的正则变换公式.

应该指出,新老哈密顿函数之间的关系总是可以用同一种方式表示,即母函数对时间的偏导数给出它们的差 $H'-H$.特别地,如果母函数不显含时间,则 $H'=H$.换句话说,这种情况下为了得到新哈密顿函数,只需在 H 中用新变量 P,Q 表示 p,q.

正则变换的广泛性,在很大程度上使哈密顿方法中广义坐标和广义动量的概念丧失其原始含义.由于变换(45.2)将变量 P,Q 中每一个都同坐标 q 和动量 p 联系在一起,所以变量 Q 已经没有纯粹的空间坐标的含义.两组变量的不同仅在于名称.这是很明显的,例如,变换 $Q_i=p_i,P_i=-q_i$[②]不改变方程的正则形式,只是将坐标和动量互换.

因此,变量 p 和 q 在哈密顿方法中经常被简称为正则共轭变量.

正则共轭性条件可以用泊松括号表示.为此我们先证明一个关于泊松括号相对正则变换的不变性定理.

设 $\{f,g\}_{p,q}$ 是 f 和 g 的泊松括号,其中微分运算是相对变量 p,q 的,而 $\{f,g\}_{P,Q}$ 是 f 和 g 的泊松括号,其中微分运算是相对变量 P,Q 的.于是有

$$\{f,g\}_{p,q}=\{f,g\}_{P,Q}.\tag{45.9}$$

这个关系式的正确性可以直接利用正则变换公式验算得到.但是,也可以通过下面讨论而不必验算来证实.

首先可以看出,在正则变换(45.7)或者(45.8)中,时间起到参数的作用.因此,如果我们证明定理(45.9)对于不显含时间的量成立,则对一般情况也成立.现在我们纯粹在形式上将 g 看作是某个假想系统的哈密顿函数.那么根据(42.1),$\{f,g\}_{p,q}=-\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$.但是 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$ 只可能依赖于(假想系统的)运动性质,而与变量选择无关.因此,在从一组正则变量变换到另一组正则变量时,泊松括号 $\{f,g\}$ 不会改变.

由公式(42.13)和定理(45.9)可得

---

① 应该指出,由母函数

$$\Phi=\sum_i f_i(q,t)P_i$$

(f_i 为任意函数)得到的变换,使新坐标由老坐标(不是动量)表示:$Q_i=f_i(q,t)$.这是点变换,是正则变换的特殊情况.

② 这个变换相应的母函数为 $F=\sum q_iQ_i$.

$$\{Q_i, Q_k\}_{p,q} = 0, \quad \{P_i, P_k\}_{p,q} = 0, \quad \{P_i, Q_k\}_{p,q} = \delta_{ik}. \qquad (45.10)$$

这是用泊松括号写出的新变量应该满足的使 $p,q \to P,Q$ 为正则变换的条件.

值得指出,在运动中变量 p,q 的变化也可以看作正则变换.这个结论的含义如下.设 q_t, p_t 是正则变量在 t 时刻的值,而 $q_{t+\tau}, p_{t+\tau}$ 是正则变量在另一个时刻 $t+\tau$ 的值.后者是前者(以及作为参量的时间间隔 τ)的函数:

$$q_{t+\tau} = q(q_t, p_t, t, \tau), \quad p_{t+\tau} = p(q_t, p_t, t, \tau).$$

如果将这些公式看作从变量 q_t, p_t 到变量 $q_{t+\tau}, p_{t+\tau}$ 的变换,则这是正则变换.由表达式

$$\mathrm{d}S = \sum (p_{t+\tau}\mathrm{d}q_{t+\tau} - p_t \mathrm{d}q_t) - (H_{t+\tau} - H_t)t$$

(见(43.7))可以看出这是显然的,其中作用量 $S(q_{t+\tau}, q_t, t)$ 是沿着给定时刻 t 和 $t+\tau$ 过点 q_t 和 $q_{t+\tau}$ 的真实轨迹的泛函.比较这个公式和(45.6)可知, $-S$ 是变换的母函数.

§46　刘维尔定理

为了给出力学现象的几何解释,经常用到相空间的概念,相空间是以力学系统的 s 个广义坐标和 s 个广义动量为坐标轴的 $2s$ 维空间.相空间的每个点对应于系统的一个确定状态.当系统运动时,表示系统状态的相点在相空间中画出的曲线称为相轨迹.微分的乘积

$$\mathrm{d}\Gamma = \mathrm{d}q_1 \cdots \mathrm{d}q_s \mathrm{d}p_1 \cdots \mathrm{d}p_s$$

可以看作相空间的"体积元".下面我们研究沿着相空间某个区域的积分 $\int \mathrm{d}\Gamma$,它表示这个区域的体积.我们来证明,这个积分值对正则变换具有不变性:如果从变量 p,q 到变量 P,Q 进行正则变换,则 p,q 空间和 P,Q 空间相应区域的体积相等,即

$$\int \cdots \int \mathrm{d}q_1 \cdots \mathrm{d}q_s \mathrm{d}p_1 \cdots \mathrm{d}p_s = \int \cdots \int \mathrm{d}Q_1 \cdots \mathrm{d}Q_s \mathrm{d}P_1 \cdots \mathrm{d}P_s. \qquad (46.1)$$

众所周知,在重积分中变量变换的公式为

$$\int \cdots \int \mathrm{d}Q_1 \cdots \mathrm{d}Q_s \mathrm{d}P_1 \cdots \mathrm{d}P_s = \int \cdots \int D \mathrm{d}q_1 \cdots \mathrm{d}q_s \mathrm{d}p_1 \cdots \mathrm{d}p_s,$$

其中

$$D = \frac{\partial(Q_1, \cdots, Q_s, P_1, \cdots, P_s)}{\partial(q_1, \cdots, q_s, p_1, \cdots, p_s)} \qquad (46.2)$$

是变换的雅可比行列式.所以证明定理(46.1)归结为证明任何正则变换的雅可比行列式都等于1,即

$$D = 1. \qquad (46.3)$$

利用雅可比行列式的一个已知性质,即在确定的含义下可以将雅可比行列

式看作分数."分子和分母除以"$\partial(q_1,\cdots,q_s,P_1,\cdots,P_s)$,得

$$D=\frac{\partial(Q_1,\cdots,Q_s,P_1,\cdots,P_s)}{\partial(q_1,\cdots,q_s,P_1,\cdots,P_s)}\Big/\frac{\partial(q_1,\cdots,q_s,p_1,\cdots,p_s)}{\partial(q_1,\cdots,q_s,P_1,\cdots,P_s)}. \tag{46.4}$$

根据雅可比行列式的另一个已知规则,如果"分子"和"分母"出现相同的量,则可以化为变量较少的雅可比行列式,并且在所有的微分中被消去的相同量应该看作常数.所以

$$D=\left\{\frac{\partial(Q_1,\cdots,Q_s)}{\partial(q_1,\cdots,q_s)}\right\}_{P=\text{const}}\Big/\left\{\frac{\partial(p_1,\cdots,p_s)}{\partial(P_1,\cdots,P_s)}\right\}_{q=\text{const}}. \tag{46.5}$$

我们研究此式分子中的雅可比行列式.根据定义,这是 s 阶行列式,其元素为$\partial Q_i/\partial q_k$(在第 i 行和第 k 列交点上的元素).利用公式(45.8)中的母函数$\Phi(q,P)$进行正则变换,得

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial q_k\partial P_i}.$$

同样可以求出表达式(46.5)的分母中行列式的第 i 行和第 k 列交点上元素为

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial q_i\partial P_k}.$$

这就是说,这两个行列式的差别仅仅是将行和列互换.所以它们相等,(46.5)等于1,定理得证.

现在我们想象在相空间中有一个小区域,其中的每个点随着时间根据系统运动方程移动.因此这个区域也移动.在这个过程中这个区域的体积不变,即

$$\int d\Gamma=\text{const}. \tag{46.6}$$

这个结论(称为刘维尔定理)可直接由正则变换下相体积的不变性,以及在运动中 p 和 q 的变化可以看作正则变换(在前一节末尾已经指出)得到.

完全类似地可以证明下面积分的不变性:

$$\iint\sum_i dq_i dp_i,$$

$$\iiiint\sum_{i\neq k}dq_i dp_i dq_k dp_k,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

其中积分沿着相空间的给定二维流形、三维流形等等.

§ 47 哈密顿-雅可比方程

在§43中已经引入了作用量作为坐标和时间函数的概念.已经证明,这个函数 $S(q,t)$对时间的偏导数与哈密顿函数的关系为

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H(q,p,t)=0,$$

而对坐标的偏导数就是广义动量. 在哈密顿函数中将相应广义动量 p 用 $\partial S/\partial q$ 代替，可得函数 $S(q,t)$ 应该满足的方程

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q_1,\cdots,q_s;\frac{\partial S}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial S}{\partial q_s};t\right)=0. \tag{47.1}$$

这是一阶偏微分方程，称为哈密顿－雅可比方程.

除了拉格朗日方程和正则方程，哈密顿－雅可比方程也是运动方程一般积分方法的基础.

在介绍这个方法之前，我们先说明一下，任何一阶偏微分方程都有依赖于任意函数的解，这个解称为方程的一般积分. 然而，在力学应用中起主要作用的不是哈密顿－雅可比方程的一般积分，而是全积分，它是偏微分方程的解，包含的独立任意常数与独立变量的数目相等.

在哈密顿－雅可比方程中独立变量是坐标和时间. 所以对于自由度为 s 的系统，哈密顿－雅可比方程的全积分应该包括 $s+1$ 个任意常数. 又因为函数 S 是以其导数的形式出现在哈密顿－雅可比方程中，所以任意常数中有一个是以相加方式出现的，即全积分形式为

$$S=f(t,q_1,\cdots,q_s;\alpha_1,\cdots,\alpha_s)+A, \tag{47.2}$$

其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 和 A 是任意常数①.

下面我们研究哈密顿－雅可比方程的全积分与我们感兴趣的运动方程的解之间的关系. 为此我们进行从变量 q,p 到新变量的正则变换，并且以 $f(t,q,\alpha)$ 为母函数，而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 作为新的动量. 新的坐标用 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 表示. 因为母函数依赖于老坐标和新动量，我们利用公式(45.8)：

$$p_i=\frac{\partial f}{\partial q_i},\quad \beta_i=\frac{\partial f}{\partial \alpha_i},\quad H'=H+\frac{\partial f}{\partial t}.$$

由于函数 f 满足哈密顿－雅可比方程，我们可以看出，新哈密顿函数应该

---

① 虽然哈密顿－雅可比方程的一般积分并不重要，但是我们还是应该指出，如果已知全积分，则可以求出一般积分. 为此，我们认为 A 是其它常数的任意函数：

$$S=f(t,q_1,\cdots,q_s;\alpha_1,\cdots,\alpha_s)+A(\alpha_1,\cdots,\alpha_s).$$

根据 s 个方程

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}=0,$$

可以用坐标和时间的函数代替 α_i，得到依赖于任意函数 $A(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$ 的形式的一般积分. 事实上，对于按某种方式给定的函数 S，有

$$\frac{\partial S}{\partial q_i}=\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)_\alpha+\sum_k\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_k}\right)_q\frac{\partial \alpha_k}{\partial q_i}=\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)_\alpha.$$

根据 $S(t,q;\alpha)$ 是哈密顿－雅可比方程的全积分的假定，$(\partial S/\partial q_i)_\alpha$ 满足哈密顿－雅可比方程. 所以 $\partial S/\partial q_i$ 也满足哈密顿－雅可比方程.

等于零：

$$H' = H + \frac{\partial f}{\partial t} = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

所以对新变量的正则方程为$\dot{\alpha}_i = 0, \dot{\beta}_i = 0$，由此可得

$$\alpha_i = \text{const}, \quad \beta_i = \text{const}. \tag{47.3}$$

另一方面，s 个方程

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = \beta_i$$

使得可能用时间和 $2s$ 个常数 α, β 来表示 s 个坐标 q. 于是我们可求得运动方程的通解.

于是用哈密顿－雅可比方法求解力学系统运动问题归结为如下运算.

根据哈密顿函数写出哈密顿－雅可比方程，并求该方程的全积分(47.2). 将它对常数 α 求偏导数并使之等于新的常数 β，可得 s 个代数方程

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i. \tag{47.4}$$

求解这个代数方程得到 q 作为时间和 $2s$ 个常数的函数. 然后由方程 $p_i = \partial S/\partial q_i$ 可以求得动量对时间的依赖关系.

如果哈密顿－雅可比方程有非全积分，它依赖于少于 s 个任意常数，则尽管不能由它求出一般积分，但是可以使问题简化. 例如，如果已知函数 S 包含一个任意常数 α，则

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \text{const}$$

给出一个关于 $q_1, \cdots, q_s$ 和 t 的方程.

当函数 H 不显含时间时，即系统保守时，哈密顿－雅可比方程有更简单的形式. 这时作用量对时间的依赖性归结为加上 $-Et$：

$$S = S_0(q) - Et \tag{47.5}$$

(参见 § 44)，代入(47.1)可得缩短作用量 $S_0(q)$的哈密顿－雅可比方程

$$H\left(q_1, \cdots, q_s; \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial S_0}{\partial q_s}\right) = E. \tag{47.6}$$

§ 48 分离变量

在一些重要的情况下，哈密顿－雅可比方程的全积分可以通过**分离变量**的方法求得，该方法的实质如下.

假设任意一个坐标，例如用 q_1 表示，与相应的导数$\partial S/\partial q_1$，在哈密顿－雅可比方程中只以某种组合的方式 $\varphi(q_1, \partial S/\partial q_1)$出现，该组合中不包含其它坐

标(或时间)及其导数,即方程形式为

$$\Phi\left\{q_i,t,\frac{\partial S}{\partial q_i},\frac{\partial S}{\partial t},\varphi\left(q_1,\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)\right\}=0, \tag{48.1}$$

其中 q_i 表示除了 q_1 之外的所有坐标.

我们将这种情况下的解写成一个和的形式:

$$S=S'(q_i,t)+S_1(q_1). \tag{48.2}$$

将这个表达式代入(48.1),可得

$$\Phi\left\{q_i,t,\frac{\partial S'}{\partial q_i},\frac{\partial S'}{\partial t},\varphi\left(q_1,\frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right)\right\}=0. \tag{48.3}$$

假设解(48.2)已经得到,那么代入(48.3)后应该使该方程成为恒等式,而这个恒等式对坐标 q_1 的任意值都成立.在 q_1 改变时只有函数 φ 发生变化,所以(48.3)是恒等式要求 φ 是常数.于是,方程(48.3)分成两个方程:

$$\varphi\left(q_1,\frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right)=\alpha_1, \tag{48.4}$$

$$\Phi\left\{q_i,t,\frac{\partial S'}{\partial q_i},\frac{\partial S'}{\partial t},\alpha_1\right\}=0. \tag{48.5}$$

其中 α_1 是任意常数.上面第一个是常微分方程,由此方程通过简单的积分可以求出函数 $S_1(q_1)$.此后还剩下偏微分方程(48.5),但是它的独立变量数目减少了.

如果用这样的方法可以分离所有 s 个坐标和时间,则哈密顿-雅可比方程的全积分就完全求出了.对于保守系统只需要分离方程(47.6)中的 s 个变量(坐标),在完全分离的情况下,方程的全积分写成

$$S=\sum_k S_k(q_k;\alpha_1,\cdots,\alpha_s)-E(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)t, \tag{48.6}$$

其中每个 S_k 都只是一个坐标的函数,而能量 E 是任意常数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的函数,可以通过将 $S_0=\sum S_k$ 代入方程(47.6)求得.

循环变量情况是分离变量的特殊情况.循环坐标 q_1 不显含于哈密顿函数,所以也不显含于哈密顿-雅可比方程中.这种情况下函数 $\varphi(q_1,\partial S/\partial q_1)$ 变为 $\partial S/\partial q_1$,由方程(48.4)求得 $S_1=\alpha_1 q_1$,因此

$$S=S'(q_i,t)+\alpha_1 q_1. \tag{48.7}$$

常数 α_1 这时正是相应于循环坐标的常值动量 $p_1=\partial S/\partial q_1$.应当注意,形式为 $-Et$ 的时间分离对于保守系统也就是相应于"循环变量" t 的分离变量方法.

由此可见,在哈密顿-雅可比方程中分离变量的方法,包括了所有以前研究过的基于循环坐标简化运动方程的情况.现在还可以补充一些坐标为非循环坐

标,但仍可能分离变量的情况.这一切都表明,哈密顿－雅可比方法是求运动方程通解的最有力的方法.

为了在哈密顿－雅可比方程中分离变量,适当选择坐标非常关键.我们来看几个在各种坐标下分离变量的例子,它们与质点在各种不同外场中运动的问题相关,具有物理意义.

1. 球坐标.用坐标(r,θ,φ)写出的哈密顿函数

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right)+U(r,\theta,\varphi),$$

如果

$$U=a(r)+\frac{b(\theta)}{r^2}+\frac{c(\varphi)}{r^2\sin^2\theta},$$

其中 $a(r),b(\theta),c(\varphi)$是任意函数,则分离变量是可能的.此式最后一项没有物理意义,我们只研究场

$$U=a(r)+\frac{b(\theta)}{r^2}. \tag{48.8}$$

在这种情况下对于函数 S_0 的哈密顿－雅可比方程为

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_0}{\partial r}\right)^2+a(r)+\frac{1}{2mr^2}\left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial\theta}\right)^2+2mb(\theta)\right]+\frac{1}{2mr^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S_0}{\partial\varphi}\right)^2=E.$$

考虑到 φ 是循环坐标,设解的形式为

$$S_0=p_\varphi\varphi+S_1(r)+S_2(\theta),$$

对于函数 $S_1(r)$和 $S_2(\theta)$有方程

$$\left(\frac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+2mb(\theta)+\frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}=\beta,$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}r}\right)^2+a(r)+\frac{\beta}{2mr^2}=E.$$

积分可得

$$S=-Et+p_\varphi\varphi+\int\sqrt{\beta-2mb(\theta)-\frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}}\mathrm{d}\theta+\int\sqrt{2m[E-a(r)]-\frac{\beta}{r^2}}\mathrm{d}r. \tag{48.9}$$

p_φ,β,E 是任意积分常数,将上式对这 3 个任意常数求导并使之等于新常数,即可给出运动方程的通解.

2. 抛物线坐标

从柱坐标(用 ρ,φ,z 表示)到抛物线坐标 ξ,η,φ 的变换公式为

$$z=\frac{1}{2}(\xi-\eta),\quad \rho=\sqrt{\xi\eta}. \tag{48.10}$$

坐标 ξ 和 η 取值范围是从零到∞,容易证实,ξ 和 η 为常数的曲面是两族旋转抛

物面(以 z 为对称轴).引入半径

$$r=\sqrt{z^2+\rho^2}=\frac{1}{2}(\xi+\eta), \tag{48.11}$$

关系式(48.10)也可以写成另外一种形式.那么

$$\xi=r+z, \quad \eta=r-z. \tag{48.12}$$

下面我们用坐标 ξ,η,φ 写出质点的拉格朗日函数.将(48.10)对时间求导并代入

$$L=\frac{m}{2}(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)-U(\rho,\varphi,z)$$

(用柱坐标写出的拉格朗日函数),得

$$L=\frac{m}{8}(\xi+\eta)\left(\frac{\dot{\xi}^2}{\xi}+\frac{\dot{\eta}^2}{\eta}\right)+\frac{m}{2}\xi\eta\dot{\varphi}^2-U(\xi,\eta,\varphi). \tag{48.13}$$

广义动量为

$$p_\xi=\frac{m}{4\xi}(\xi+\eta)\dot{\xi}, \quad p_\eta=\frac{m}{4\eta}(\xi+\eta)\dot{\eta}, \quad p_\varphi=m\xi\eta\dot{\varphi}.$$

哈密顿函数为

$$H=\frac{2}{m}\frac{\xi p_\xi^2+\eta p_\eta^2}{\xi+\eta}+\frac{p_\varphi^2}{2m\xi\eta}+U(\xi,\eta,\varphi). \tag{48.14}$$

在这种坐标下,物理上有意义的分离变量情况相应于势能

$$U=\frac{a(\xi)+b(\eta)}{\xi+\eta}=\frac{a(r+z)+b(r-z)}{2r}. \tag{48.15}$$

我们有方程

$$\frac{2}{m(\xi+\eta)}\left[\xi\left(\frac{\partial S_0}{\partial\xi}\right)^2+\eta\left(\frac{\partial S_0}{\partial\eta}\right)^2\right]+\frac{1}{2m\xi\eta}\left(\frac{\partial S_0}{\partial\varphi}\right)^2+\frac{a(\xi)+b(\eta)}{\xi+\eta}=E.$$

循环坐标 φ 以 $p_\varphi\varphi$ 的形式分离出来.然后将方程乘以 $m(\xi+\eta)$ 并重新组合各项,得

$$2\xi\left(\frac{\partial S_0}{\partial\xi}\right)^2+ma(\xi)-mE\xi+\frac{p_\varphi^2}{2\xi}+2\eta\left(\frac{\partial S_0}{\partial\eta}\right)^2+mb(\eta)-mE\eta+\frac{p_\varphi^2}{2\eta}=0.$$

令

$$S_0=p_\varphi\varphi+S_1(\xi)+S_2(\eta),$$

可得两个方程

$$2\xi\left(\frac{dS_1}{d\xi}\right)^2+ma(\xi)-mE\xi+\frac{p_\varphi^2}{2\xi}=\beta,$$

$$2\eta\left(\frac{dS_2}{d\eta}\right)^2+mb(\eta)-mE\eta+\frac{p_\varphi^2}{2\eta}=-\beta.$$

积分可得

$$S=-Et+p_{\varphi}\varphi+\int\sqrt{\frac{mE}{2}+\frac{\beta}{2\xi}-\frac{ma(\xi)}{2\xi}-\frac{p_{\varphi}^{2}}{4\xi^{2}}}\mathrm{d}\xi+$$

$$\int\sqrt{\frac{mE}{2}+\frac{\beta}{2\eta}-\frac{mb(\eta)}{2\eta}-\frac{p_{\varphi}^{2}}{4\eta^{2}}}\mathrm{d}\eta. \tag{48.16}$$

p_{φ},β,E 是任意积分常数.

3. 椭圆坐标.坐标 ξ,η,φ 由公式

$$\rho=\sigma\sqrt{(\xi^{2}-1)(1-\eta^{2})},\quad z=\sigma\xi\eta. \tag{48.17}$$

给出,常数 σ 是变换参数.坐标 ξ 取值范围是从 1 到 ∞,而坐标 η 取值范围是从 -1 到 $+1$.设 z 轴上两个点 A_1 和 A_2 的坐标为 $z=\sigma$ 和 $z=-\sigma$,如果 r_1 和 r_2 是到这两个点的距离:

$$r_1=\sqrt{(z-\sigma)^{2}+\rho^{2}},\quad r_2=\sqrt{(z+\sigma)^{2}+\rho^{2}},$$

则可以得到几何意义明显的关系式①.

代入(48.17)可得

$$r_1=\sigma(\xi-\eta),\quad r_2=\sigma(\xi+\eta),\quad \xi=\frac{r_2+r_1}{2\sigma},\quad \eta=\frac{r_2-r_1}{2\sigma}. \tag{48.18}$$

从柱坐标到椭圆坐标变换拉格朗日函数,可得

$$L=\frac{m\sigma^{2}}{2}(\xi^{2}-\eta^{2})\left(\frac{\dot{\xi}^{2}}{\xi^{2}-1}+\frac{\dot{\eta}^{2}}{1-\eta^{2}}\right)+\frac{m\sigma^{2}}{2}(\xi^{2}-1)(1-\eta^{2})\dot{\varphi}^{2}-U(\xi,\eta,\varphi). \tag{48.19}$$

由此可得哈密顿函数

$$H=\frac{1}{2m\sigma^{2}(\xi^{2}-\eta^{2})}\Big[(\xi^{2}-1)p_{\xi}^{2}+(1-\eta^{2})p_{\eta}^{2}+$$

$$\left(\frac{1}{\xi^{2}-1}+\frac{1}{1-\eta^{2}}\right)p_{\varphi}^{2}\Big]+U(\xi,\eta,\varphi). \tag{48.20}$$

物理上有意义的分离变量情况相应于势能为

$$U=\frac{a(\xi)+b(\eta)}{\xi^{2}-\eta^{2}}=\frac{\sigma^{2}}{r_1r_2}\left[a\left(\frac{r_1+r_2}{2\sigma}\right)+b\left(\frac{r_2-r_1}{2\sigma}\right)\right], \tag{48.21}$$

其中 $a(\xi),b(\eta)$是任意函数.在哈密顿－拉格朗日方程中分离变量的结果给出

---

① ξ 为常数的曲面是以 A_1 和 A_2 为焦点的一簇椭球面

$$\frac{z^{2}}{\sigma^{2}\xi^{2}}+\frac{\rho^{2}}{\sigma^{2}(\xi^{2}-1)}=1,$$

而 η 为常数的曲面是以 A_1 和 A_2 为焦点的一簇双曲面

$$\frac{z^{2}}{\sigma^{2}\eta^{2}}-\frac{\rho^{2}}{\sigma^{2}(1-\eta^{2})}=1.$$

$$S = -Et + p_\varphi \varphi + \int \sqrt{2m\sigma^2 E + \frac{\beta - 2m\sigma^2 a(\xi)}{\xi^2 - 1} - \frac{p_\varphi^2}{(\xi^2-1)^2}} d\xi +$$
$$\int \sqrt{2m\sigma^2 E + \frac{\beta + 2m\sigma^2 b(\eta)}{1 - \eta^2} - \frac{p_\varphi^2}{(1-\eta^2)^2}} d\eta. \qquad (48.22)$$

习　题

习题 1　设质点在场

$$U = \frac{\alpha}{r} - Fz$$

(库仑场和均匀场相加)中运动,试求哈密顿－雅可比方程的全积分,并求这个运动特有的作为坐标和动量函数的守恒量.

解:这个场属于类型(48.15),并且

$$a(\xi) = \alpha - \frac{F}{2}\xi^2, \quad b(\eta) = \alpha + \frac{F}{2}\eta^2.$$

哈密顿－雅可比方程的全积分由(48.16)给出.

为了解释常数 β 的含义,我们写出方程

$$2\xi p_\xi^2 + ma(\xi) - mE\xi + \frac{p_\varphi^2}{2\xi} = \beta,$$

$$2\eta p_\eta^2 + mb(\eta) - mE\eta + \frac{p_\varphi^2}{2\eta} = -\beta.$$

将两个方程相减,用柱坐标下的动量 $p_\rho = \partial S/\partial \rho$ 和 $p_z = \partial S/\partial z$ 表示 $p_\xi = \partial S/\partial \xi$ 和 $p_\eta = \partial S/\partial \eta$,简单计算后得

$$\beta = -m\left[\frac{\alpha z}{r} + \frac{p_\rho}{m}(zp_\rho - \rho p_z) + \frac{p_\varphi^2}{m\rho^2}z\right] - \frac{m}{2}F\rho^2.$$

方括号中表达式是纯库仑场特有的运动积分(矢量(15.17)的 z 分量).

习题 2　同上题,但外场为

$$U = \frac{\alpha_1}{r_1} + \frac{\alpha_2}{r_2}$$

(两个相距为 2σ 的不动中心的库仑场).

解:这个场属于类型(48.21),并且

$$a(\xi) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\sigma}\xi, \quad b(\eta) = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sigma}\eta.$$

将这些表达式代入(48.22)可得作用量 $S(\xi, \eta; \varphi, t)$. 常数 β 的含义解释类似于习题 1,在这种情况下它反映下面量守恒:

$$\beta = \sigma^2\left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2}\right) - M^2 + 2m\sigma(\alpha_1 \cos\theta_1 + \alpha_2 \cos\theta_2),$$

其中

$$M^2=(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})^2=p_\rho^2z^2+p_z^2\rho^2+\frac{r^2p_\varphi^2}{\rho^2}-2z\rho p_z p_\rho,$$

而 θ_1 和 θ_2 是图 55 所示的角度.

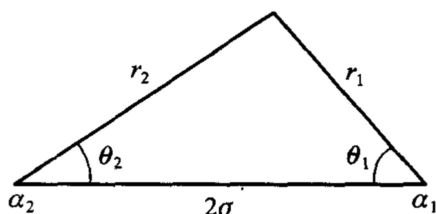


图 55

§ 49 绝热不变量

我们研究一个作一维有限运动的力学系统,某个参数 λ 可以确定系统本身或者系统所处外场的性质①.

假设参数 λ 在某个外因影响下随时间缓慢(绝热地)变化.缓慢的意思是在一个运动周期 T 时间内 λ 的变化很小,即

$$T\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\ll\lambda. \tag{49.1}$$

当 λ 为常数时,系统是封闭的且以常能量 E 和确定周期 $T(E)$ 作严格周期运动.当 λ 变化时,系统不是封闭的,能量不守恒.但是因为假设 λ 变化缓慢,所以能量 E 的变化速度也很小.如果按周期 T 平均这个速度,消去其中的"快"振动,则所得的值 E 决定了系统能量的系统性缓慢的变化,可以确信,它正比于参数变化速度 $\dot{\lambda}$.换句话说,按所给出的意思理解的缓慢变化量 E 是 λ 的某个函数.E 对 λ 的依赖关系可以写成 E 和 λ 的某种组合.在含有缓慢变换参数的系统运动过程中保持不变的量称为绝热不变量.

设 $H(q,p,\lambda)$ 是依赖于参数 λ 的系统的哈密顿函数.根据(40.5),系统能量变化速度为

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial\lambda}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}. \tag{49.2}$$

这个公式右端表达式仅仅依赖于慢变量 λ,而且依赖于快变量 q,p.为了分离我们感兴趣的能量改变的系统性变化过程,应该按运动周期平均等式(49.2).考虑到 λ 变化缓慢($\dot{\lambda}$ 变化也缓慢),可以将 $\dot{\lambda}$ 移到平均化符号之外:

$$\overline{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}}=\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\overline{\frac{\partial H}{\partial\lambda}}, \tag{49.3}$$

在被平均的函数 $\partial H/\partial\lambda$ 中只将 q,p 看作变量,而 λ 不看作变量.换句话说,在假设 λ 是给定常数情况下对系统的运动平均.

我们将平均值写成显式为

$$\overline{\frac{\partial H}{\partial\lambda}}=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{\partial H}{\partial\lambda}\mathrm{d}t.$$

---

① 为了书写公式简便,我们假设只有一个这样的参数,但是所有的结论对任意多个参数情况也成立.

根据哈密顿方程 $\dot{q}=\partial H/\partial p$ 有

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}q}{\partial H/\partial p}.$$

利用这个等式将对时间的积分换为对坐标的积分，并且周期 T 写成

$$T=\int_0^T \mathrm{d}t=\oint\frac{\mathrm{d}q}{\partial H/\partial p},\tag{49.4}$$

这里的 $\oint$ 表示沿着坐标在一个周期时间内完整变化（“向前”和“向后”）的积分①. 于是，公式(49.3)的形式为

$$\overline{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}}=\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\frac{\oint\frac{\partial H/\partial\lambda}{\partial H/\partial p}\mathrm{d}q}{\oint\frac{\mathrm{d}q}{\partial H/\partial p}}.\tag{49.5}$$

前面已经指出过，这个公式中的积分应该沿着 λ 作为给定常数时运动轨迹. 沿着这个轨迹哈密顿函数保持常值 E，而动量是坐标 q 和两个独立参数 E，λ 的确定函数. 将动量当作函数 $p(q;E,\lambda)$ 并将等式 $H(p,q;\lambda)=E$ 对参数 λ 求导，得

$$\frac{\partial H}{\partial\lambda}+\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial\lambda}=0$$

或者

$$\frac{\partial H/\partial\lambda}{\partial H/\partial p}=-\frac{\partial p}{\partial\lambda}.$$

将此式代入(49.5)上面的积分并将下面积分的被积函数写成 $\partial p/\partial E$，有

$$\overline{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}}=-\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\frac{\oint\frac{\partial p}{\partial\lambda}\mathrm{d}q}{\oint\frac{\partial p}{\partial E}\mathrm{d}q}$$

或者

$$\oint\left(\frac{\partial p}{\partial E}\overline{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}}+\frac{\partial p}{\partial\lambda}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}q=0.$$

这个等式最后可以写成

$$\overline{\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}}=0,\tag{49.6}$$

其中 I 表示沿着当给定 E，λ 时的运动轨迹的积分

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint p\,\mathrm{d}q.\tag{49.7}$$

---

① 如果系统的运动是转动，而坐标 q 是某个转角 φ，则对 φ 的积分应该是沿着“完整一圈”，即从零到 2π.

这个结果表明,当参数 λ 变化时,在所研究的近似中 I 保持常数,即 I 是绝热不变量.

I 是系统能量(和参数 λ)的函数,它对能量的偏导数确定运动周期:根据(49.4),有

$$2\pi\frac{\partial I}{\partial E}=\oint\frac{\partial p}{\partial E}\mathrm{d}q=T,\tag{49.8}$$

或者

$$\frac{\partial E}{\partial I}=\omega,\tag{49.9}$$

其中 $\omega=2\pi/T$ 是系统振动频率.

如果利用系统相空间的概念,可以给积分(49.7)以明显的几何意义.在给定情况下(一个自由度),相空间化为坐标系 p,q,而周期运动系统的相轨迹是这个平面上的封闭曲线.沿着这条曲线的积分(49.7)是该曲线所包围的面积.它可以写成对面积的二重积分

$$I=\frac{1}{2\pi}\int\mathrm{d}p\mathrm{d}q.\tag{49.10}$$

作为例子,我们来确定一维振子的绝热不变量.它的哈密顿函数为

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2q^2}{2},\tag{49.11}$$

其中 ω 是振子的固有频率.相轨迹方程由能量守恒定律给出:

$$H(p,q)=E.$$

这是半轴为 $\sqrt{2mE}$ 和 $\sqrt{2E/m\omega^2}$ 的椭圆,它的面积(乘以 2π)为

$$I=E/\omega.\tag{49.12}$$

这个绝热不变量意味着,当振子的参数缓慢变化时,能量和频率成正比.

§50　正则变量

下面设参数 λ 为常数,因此系统是封闭的.

我们选择 I 作为新的"动量",做变量 q,p 的正则变换.这时表示为 q,I 的函数的"缩短作用量"S_0 就是母函数.事实上,S_0 定义为给定 E(和 λ)时的积分

$$S_0(q,E;\lambda)=\int p(q,E;\lambda)\mathrm{d}q.\tag{50.1}$$

但是,对于封闭系统,I 只是能量的函数,所以 S_0 可以表示成函数 $S_0(q,I;\lambda)$ 的形式,偏导数 $(\partial S_0/\partial q)_{E=p}$ 等于 I 为常数时的偏导数 $(\partial S_0/\partial q)_I$.所以有

$$p=\frac{\partial S_0(q,I;\lambda)}{\partial q},\tag{50.2}$$

相应于正则变换(45.8)中第一个公式.第二个公式确定新"坐标",我们用 w 表

示：

$$w=\frac{\partial S_0(q,I;\lambda)}{\partial I}. \tag{50.3}$$

I 和 w 是正则变量，I 称为作用变量，w 称为角变量.

由于母函数 $S_0(q,I;\lambda)$不显含时间，所以新的哈密顿函数 H'与老的 H 相同. 换句话说，H'是以作用变量的函数表示的能量 $E(I)$. 相应的哈密顿方程为

$$\dot{I}=0, \quad \dot{w}=\frac{\mathrm{d}E(I)}{\mathrm{d}I}. \tag{50.4}$$

由第一个方程得 $I=\mathrm{const}$，即 I 和能量都是常数. 由第二个方程可知，角变量是时间的线性函数：

$$w=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}I}t+\mathrm{const}=w(I)t+\mathrm{const}, \tag{50.5}$$

这是振动相位.

作用量 $S_0(q,I)$是坐标的非单值函数. 每经过一个周期，这个函数不回到原来的值，而是有一个增量

$$\Delta S_0=2\pi I, \tag{50.6}$$

从(50.1)和 I 的定义(49.7)来看这是很显然的. 在同样的时间内，角变量的增量为

$$\Delta w=\Delta\frac{\partial S_0}{\partial I}=\frac{\partial}{\partial I}\Delta S_0=2\pi. \tag{50.7}$$

相反地，如果我们用 I,w 表示 q,p(或者它们的单值函数 $F(q,p)$)，则 w 变换 2π(I 为给定值)时，这些函数的值不变. 换言之，用这正则变量 I,w 表示的 $F(q,p)$是 w 的周期为 2π 的函数.

对于参数 λ 随时间变化的非封闭系统，运动方程也可以用正则变量 I,w 表示. 以积分(50.1)定义、用(49.7)确定的 I 表示的 S_0 为母函数，按公式(50.2)和(50.3)可以实现到这些变量的变换. 这时计算不定积分(50.1)和定积分(49.7)就如同参数 $\lambda(t)$是常数，就是说，将函数 $S_0(q,I;\lambda(t))$中参数 λ 看作常数进行计算，然后再用给定函数 $\lambda(t)$代替回来①.

因为现在母函数(以及参数 λ)显含时间，新哈密顿函数 H'与老哈密顿函数不同，即与能量 $E(I)$不同. 根据正则变换一般公式(45.8)有

$$H'=E(I;\lambda)+\frac{\partial S_0}{\partial t}=E(I;\lambda)+\Lambda\dot{\lambda}, \tag{50.8}$$

其中引入了记号

---

① 然而，需要强调的是，按这种方式确定的函数 S_0 已经不是哈密顿函数显含时间的系统的真实缩短作用量！

$$\Lambda = \left(\frac{\partial S_0}{\partial t}\right)_{q,I}, \tag{50.9}$$

并且 Λ 应该根据公式(50.3)用 I,w 表示.

现在哈密顿方程为

$$\dot{I} = -\frac{\partial H'}{\partial w} = -\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial w}\right)_{I,\lambda}\dot{\lambda}, \tag{50.10}$$

$$\dot{w} = \frac{\partial H'}{\partial I} = \omega(I;\lambda) + \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial I}\right)_{w,\lambda}\dot{\lambda}, \tag{50.11}$$

其中 $\omega = (\partial E/\partial I)_\lambda$ 是振动频率(就像 λ 是常数那样计算).

习　题

习题　对频率依赖于时间的简谐振子(哈密顿函数(49.11))写出用正则变量 I,w 表示的运动方程.

解:在(50.1)—(50.3)中所有的作用量都是在 λ(在本题中它就起频率 ω 的作用)为常数时计算的,因此 q,p 与 w 的关系同定常频率($w=\omega t$)一样:

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\sin w = \sqrt{\frac{2I}{m\omega}}\sin w, \quad p = \sqrt{2I\omega m}\cos w.$$

由此得

$$S_0 = \int p\,\mathrm{d}q = \int p\left(\frac{\partial q}{\partial w}\right)_{I,w}\mathrm{d}w = 2I\int\cos^2 w\,\mathrm{d}w.$$

然后有

$$\Lambda = \left(\frac{\partial S_0}{\partial \omega}\right) = \left(\frac{\partial S_0}{\partial w}\right)_I\left(\frac{\partial w}{\partial \omega}\right)_q = \frac{I}{2\omega}\sin 2w.$$

方程(50.10)和(50.11)写成

$$\dot{I} = -I\frac{\dot{\omega}}{\omega}\cos 2w, \quad \dot{w} = \omega + \frac{\dot{\omega}}{2\omega}\sin 2w.$$

§ 51　绝热不变量守恒精确性

利用运动方程(50.10)可以再次证明作用变量的绝热不变性.

函数 $S_0(q,I;\lambda)$ 是 q 的非单值函数,当坐标变化回到初始值时,S_0 增加 $2\pi I$.在(50.9)中求导是在 I 为常值时进行的,S_0 的增量为零,因此这个导数是单值函数.像所有的单值函数一样,Λ 由角变量 w 表示并且是它的周期函数.周期函数的导数$\partial\Lambda/\partial w$(对周期)的平均值等于零.所以平均方程(50.10)并将$\dot{\lambda}$移出平均符号(λ 的变化缓慢),可得

$$\overline{\dot{I}} = -\overline{\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial w}\right)_I}\dot{\lambda} = 0, \tag{51.1}$$

于是结论得证.

利用运动方程(50.10)和(50.11)可以研究绝热不变量守恒的精度.我们将这个问题提成如下形式:设当 $t\to-\infty$ 和 $t\to+\infty$ 时,参数 $\lambda(t)$ 趋向于定常极限值 λ_- 和 λ_+,绝热不变量的初值 I_- 给定(当 $t=-\infty$ 时),我们求 $t=+\infty$ 时的增量 $\Delta I=I_+-I_-$.

由方程(50.10)有

$$\Delta I=-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\Lambda}{\partial w}\dot{\lambda}\,\mathrm{d}t. \tag{51.2}$$

前面已经证明过 Λ 是变量 w 的周期函数(周期为 2π),我们将它展开为傅里叶级数:

$$\Lambda=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}lw}\Lambda_l \tag{51.3}$$

(由于 Λ 为实数,展开式的系数满足关系 $\Lambda_{-l}=\Lambda_l^*$).由此得

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial w}=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\mathrm{i}l\mathrm{e}^{\mathrm{i}lw}\Lambda_l=2\mathrm{Re}\sum_{l=1}^{\infty}\mathrm{i}l\mathrm{e}^{\mathrm{i}lw}\Lambda_l. \tag{51.4}$$

当 $\dot{\lambda}$ 足够小时,导数 $\dot{w}$ 是正的(它的符号与 ω 一致,参见(50.11)),即 w 是时间的单调函数.因此在将(51.2)从对 t 积分变换为对 w 积分时,积分限不变,即

$$\Delta I=-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\Lambda}{\partial w}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}w}\mathrm{d}w. \tag{51.5}$$

将(51.4)代入此式并将 w 在形式上看作复变量来进行积分变换.假设被积表达式对于实值 w 没有奇点,将积分路径从实轴 w 移到上半平面.这时回路绕过被积表达式的奇点"连接",如图 56 所示.

设 w_0 是接近实轴的奇点,即虚部(正数)最小的奇点.在积分(51.5)中这个点的邻域的贡献是主要的,并且级数(51.4)的每一项给出包含乘子 $\exp(-l\,\mathrm{Im}\,w_0)$ 的贡献.仍然保留绝对值最小的负指数项(即 $l=1$ 的项),可得①

$$\Delta I\sim\exp(-\mathrm{Im}\,w_0). \tag{51.6}$$

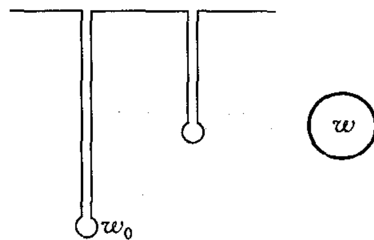


图 56

设 t_0 是相应于点 w_0 的时刻(复数!):$w(t_0)=w_0$.一般来说,$|t_0|$ 的量级与系统参

① 在特殊情况下,展开式(51.4)中不包含 $l=1$ 的项(参见本节习题),在任何情况下都要选择级数中 l 为最小值的项.

数变化的特征时间相同,我们用 τ 表示这个时间①.在(51.6)中指数的量级为

$$\operatorname{Im} w_0 \sim \omega\tau \sim \tau/T. \tag{51.7}$$

按照假设,$\tau \gg T$,因此这个指数很大.于是 $I_+ - I_-$ 随着系统参数变化速度减小而指数衰减②.

为了确定 T/τ 的一阶近似下的 w_0(即在指数中只保留$(T/\tau)^{-1}$量级的项),可以在方程(50.11)中略去含 λ 的小量,即写成

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \omega(I, \lambda(t)), \tag{51.8}$$

并且假设函数 $\omega(I, \lambda(t))$的自变量 I 是常数,等于 I_-.那么

$$w_0 = \int^{t_0} \omega(I, \lambda(t))\mathrm{d}t \tag{51.9}$$

(积分下限可以取任意实数值 t,我们感兴趣的 w_0 的虚部与这个值无关)③.

由(51.8)得到的 $\dot{w}$(并取$\partial\Lambda/\partial w$ 的级数中的一项),积分(51.5)变为

$$\Delta I \sim \operatorname{Re}\int \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} \frac{\dot{\lambda}\,\mathrm{d}w}{\omega(I, \lambda)}. \tag{51.10}$$

由此可见,作为竞争奇点(当选择接近实轴的奇点时),需要考虑函数 $\dot{\lambda}(t)$和 $1/\omega(t)$的奇异性(极点、分叉点).从这个关系式可知,ΔI 为指数小量的结论是与上述函数没有奇点的假设相关的.

习 题

习题 1 设简谐振子的频率按规律

$$\omega^2 = \omega_0^2 \frac{1 + a\mathrm{e}^{\alpha t}}{1 + \mathrm{e}^{\alpha t}}$$

从 $t = -\infty$ 时的值 $\omega_- = \omega_0$ 到 $t = \infty$ 时的值 $\omega_+ = \sqrt{a}\omega_0$ ($a > 0, \alpha \ll \omega_0$)变化,试分析 ΔI 的量级④.

解:将参数 λ 理解为频率 ω,有

$$\frac{\dot{\lambda}}{\omega} = \frac{\alpha}{2}\left(\frac{a}{\mathrm{e}^{-\alpha t} + a} - \frac{1}{\mathrm{e}^{-\alpha t} + 1}\right).$$

---

① 如果参数变化缓慢表现为它对时间的依赖形式是 $\xi = t/\tau$,其中 τ 很大,则 $t_0 = \tau\xi_0$,其中 ξ_0 是函数 $\lambda(\xi)$不依赖于 τ 的奇点.

② 应该指出,如果函数 $\lambda(t)$的初值和终值相等($\lambda_- = \lambda_+$),则不仅 ΔI 按指数衰减,而且根据公式(49.9),能量的终值和初值之差 $\Delta E = E_+ - E_- = \omega\Delta I$ 也是指数衰减.

③ 更详细的证明以及公式(51.6)中指数乘子的计算可参见论文:Слуцкин А. А.//ЖЭТФ. – 1963. – Т.45. – С.978.

④ 振子的简谐性反映在振动频率不依赖于能量.

当 $e^{-\alpha t}=-1$ 和 $e^{-\alpha t}=-a$ 时，这个函数有奇点. 计算积分 $\int\omega \mathrm{d}t$，求出由奇点 $\alpha t_0=-\ln(-a)$ 得到的 $\mathrm{Im}w_0$ 的最小值

$$\mathrm{Im}w_0=\begin{cases}\omega_0\pi/\alpha & (a>1),\\ \omega_0\pi\sqrt{a}/\alpha & (a<1).\end{cases}$$

对于简谐振子，$\Lambda\sim\sin 2w$（参见 §50 的习题），所以级数(51.3)化为两项（$l=\pm 2$）. 因此

$$\Delta I\sim\exp(-2\mathrm{Im}w_0).$$

习题 2 质点在势能阱中振动. 试求在摩擦力 $f_{\mathrm{tp}}=-\alpha\dot{x}$ 作用下能量变化规律，其中系数 α 是很小，x 为笛卡儿坐标.

解：按振动周期平均方程(25.13)，在一阶近似中忽略阻尼. 有

$$\overline{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}}=-\overline{\alpha\dot{x}^2}=-\frac{\alpha}{T}\int_0^T\dot{x}^2\mathrm{d}t=-\frac{\alpha}{T}\oint\dot{x}^2\mathrm{d}t=-\frac{2\pi\alpha}{mT}I(\overline{E}),$$

其中 $I(E)$ 是绝热不变量，m 是质点的质量. 根据(49.8)，用 I 表示振动周期 T，求得

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\overline{E}}\frac{\mathrm{d}\overline{E}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\alpha}{m}I.$$

积分得

$$I(\overline{E})=I(E_0)\exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right).$$

这个公式隐式给出了 $\overline{E}(t)$. 对于简谐振子，这个公式变为(25.5). 这个解在 $\alpha T/m\ll 1$ 的条件下成立.

§52 条件周期运动

我们研究多自由度封闭系统的有限运动（所有坐标都是有限的）. 假设可以用哈密顿－雅可比方法完全分离变量. 这就是说，适当选择坐标可以使缩短作用量写成

$$S_0=\sum_i S_i(q_i),\tag{52.1}$$

其中每个函数都仅依赖于一个坐标.

因为广义动量为

$$p_i=\frac{\partial S_0}{\partial q_i}=\frac{\mathrm{d}S_i}{\mathrm{d}q_i},$$

所以每个函数 S_i 都可以写成

$$S_i=\int p_i\mathrm{d}q_i.\tag{52.2}$$

这些函数是非单值的. 根据运动有限性，每个坐标在确定的有限时段内都只

能取有限值．当 q_i 在此时段内"向前"和"向后"变化时，作用量获得增量为

$$\Delta S_0 = \Delta S_i = 2\pi I_i, \tag{52.3}$$

其中 I_i 是沿着 q_i 变化计算的积分[①]

$$I_i = \frac{1}{2\pi}\oint p_i \mathrm{d}q_i. \tag{52.4}$$

现在进行类似于前一节对于一个自由度系统所做的正则变换．新变量是"作用变量"I_i 和"角变量"

$$w_i = \frac{\partial S_0(q,I)}{\partial I_i} = \sum_k \frac{\partial S_k(q_k,I)}{\partial I_i}, \tag{52.5}$$

其中母函数是写成坐标和 I_i 的函数形式的作用量，运动方程

$$\dot{I}_i = 0, \quad \dot{w}_i = \frac{\partial E(I)}{\partial I_i}$$

给出

$$I_i = \text{const}, \tag{52.6}$$

$$w_i = \frac{\partial E(I)}{\partial I_i}t + \text{const}. \tag{52.7}$$

类似(50.7)可得，坐标 q_i 的完整变化("向前"和"向后")对应于相应的 w_i 变化 2π:

$$\Delta w_i = 2\pi. \tag{52.8}$$

也就是说，$w_i(q,I)$是坐标的非单值函数，当坐标变化返回到初值时，它可能改变了 2π 的整数倍．这个性质也决定了函数 $w_i(p,q)$(用坐标和动量表示)在相空间中的性质．既然用 q,p 表示的 I_i 是这些变量的单值函数，则将 $I_i(p,q)$代入 $w_i(q,I)$，可得函数 $w_i(p,q)$，它在相空间中沿着任意封闭曲线可能改变 2π 的整数(或者零)倍．

由此可得，系统状态的任何单值函数 $F(p,q)$[②]，用正则变量 I,w 表示后，都是角变量的周期函数，并且周期为 2π．这个函数可以展开成傅里叶级数形式

$$F = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{l_s=-\infty}^{\infty} A_{l_1 l_2 \cdots l_s}\exp[\mathrm{i}(l_1 w_1 + \cdots + l_s w_s)]$$

$(l_1, l_2, \cdots, l_s$ 是整数)．将角变量作为时间的函数代入，可得 F 对时间的依赖关

① 但是，应该强调指出，这里所指的是坐标 q_i 在其允许值区间内形式上的变化，不是在实际运动周期内的变化(像一维运动情况就是这样)．多自由度系统实际的有限运动，在一般情况下不仅整个运动不是周期的，而且甚至每个坐标单独随时间的变化也不是周期的(见下面)．

② 因为相差 2π 整数倍的 φ 对应于系统的同一个状态，所以"转动坐标"φ(参见第 158 页脚注)与系统状态的关系是非单值的．因此，如果在坐标 q 中有这样的角 φ，则在函数 $F(q,p)$中所包含的 φ，只能是形如 $\sin\varphi$ 或者 $\cos\varphi$ 的表达式，这样的表达式与系统状态之间的关系是单值的．

系

$$F=\sum_{l_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{l_s=-\infty}^{\infty}A_{l_1l_2\cdots l_s}\exp\left\{\mathrm{i}t\left(l_1\frac{\partial E}{\partial I_1}+l_2\frac{\partial E}{\partial I_2}+\cdots+l_s\frac{\partial E}{\partial I_s}\right)\right\}. \tag{52.9}$$

这个和中的每一项都是时间的周期函数,其频率

$$l_1w_1+\cdots+l_sw_s, \tag{52.10}$$

是基频

$$w_i=\frac{\partial E}{\partial I_i} \tag{52.11}$$

的整数倍之和.既然所有频率(52.10)一般不是某一个频率的整数(或有理数)倍,则整个和(52.9)不是严格的周期函数.特别地,坐标 q 和 p 本身就不是周期函数.

因此,系统的运动,无论作为整体还是某个坐标,一般不是严格周期的.这就是说,如果系统经过某个状态,那么系统在任意长的有限时间内都不会重新经过这个状态.但是可以肯定,在足够长的时间内,系统会无限接近这个状态.由于这个性质,这种运动称为*条件周期运动*.

在很多特殊情况下,基频 w_i 中有两个(更多个)可以相约(在 I_i 取任意值的情况下).这种情况称为*存在退化*,如果所有 s 个频率相约,则系统的运动称为*完全退化*.显然,在后一种情况下,运动是严格周期的,所有质点的轨迹都是封闭的.

首先,存在退化导致系统能量所依赖的独立变量(I_i)的数量减少.设两个频率 w_1 和 w_2 满足关系式

$$n_1\frac{\partial E}{\partial I_1}=n_2\frac{\partial E}{\partial I_2}, \tag{52.12}$$

其中 n_1 和 n_2 是整数.由此可得,I_1 和 I_2 以 $n_1I_1+n_2I_2$ 的形式出现在能量中.

退化运动最重要的特性是,单值的运动积分数目与非退化的一般情况(等于自由度)相比增加了.在非退化情况下,在$(2s-1)$个运动积分中有 s 个系统状态函数是单值的,例如 s 个 I_i 就是完全的一组.其余的 $s-1$ 个积分可以写成

$$w_i\frac{\partial E}{\partial I_k}-w_k\frac{\partial E}{\partial I_i}. \tag{52.13}$$

由公式(52.7)直接可以得出这些差是常数,但是由于角变量的非单值性,这些差不是系统状态的单值函数.

存在退化时情况就不同了.例如,根据关系式(52.12),积分

$$w_1n_2-w_2n_1 \tag{52.14}$$

尽管是非单值的,但是非单值性归结为增加 2π 的任意整数倍.所以只要取这些

量的三角函数就可以得到新的单值运动积分.

在场 $U=-\alpha/r$ 中的运动(见本节习题)就是退化运动的例子.正是存在退化导致系统出现新的特别的单值运动积分(15.17),而系统的两个通常单值运动积分(假设是平面运动),即动量矩 M 和能量 E,是任何有心力场中的运动都有的.

我们会发现,出现附加单值积分反过来使退化运动具有一个特性:退化运动不只是在一种确定的坐标选择下,而是在多种不同的坐标选择下可以完全分离变量①.事实上,用可以分离的变量表示的 I_i 是单值运动积分.但是存在运动退化时,单值运动积分数大于 s,所以作为 I_i 的运动积分的选择不是唯一的.

以开普勒运动为例,在球坐标和抛物线坐标下都可以分离变量.

在前一节已经证明,在一维有限运动中作用变量是绝热不变量.对于多自由度系统这个结论也正确.直接推广 §51 介绍的方法就可以证明.

对于含参数 $\lambda(t)$ 的多维系统,正则变量 I,w 写出的运动方程,给出类似于(50.10)的每个变量 I_i 的变化速度表达式

$$\dot{I}_i=-\frac{\partial\Lambda}{\partial w_i}\dot{\lambda},\tag{52.15}$$

其中 $\Lambda=(\partial S_0/\partial\lambda)_I$.这个等式的平均化应该在大于系统周期的时间间隔内进行,并且在这个时间间隔内参数 $\lambda(t)$ 变化很小.这时 $\dot{\lambda}$ 可以移到平均符号之外,在平均 $\partial\Lambda/\partial w_i$ 时,我们认为 λ 是常数,因而系统运动是条件周期的.那么 Λ 就是角变量的单值周期函数,$\partial\Lambda/\partial w_i$ 的平均值等于零.

最后我们对多自由度(s)封闭系统有限运动在一般情况下的性质做几点说明,这时不假设哈密顿－雅可比方程可以分离变量.

数目等于自由度的运动积分 I_i 的单值性是分离变量系统的基本性质.在系统不能分离变量的一般情况下,单值运动积分只限于那些反映空间、时间的均匀性和各向同性的量,即单值运动积分就是能量守恒、动量守恒和动量矩守恒.

系统的相轨迹位于相空间中单值运动积分确定的区域.对于可分离变量的系统,s 个单值运动积分确定了相空间中的 s 维流形(超曲面).在足够长的时间内,系统的相轨迹无限稠密地覆盖这个超曲面.

对于不能分离变量的系统,单值运动积分较少,在相空间中相轨迹(完全或者部分地)充满维数更高的区域(流形).

最后需要指出,如果哈密顿函数与可以分离变量的函数仅相差很小的项,则运动性质接近条件周期运动,并且接近程度远远超过哈密顿函数中附加小量项

---

① 这时我们不考虑形如 $q_1'=q_1'(q_2)$,$q_2'=q_2'(q_1)$ 的简单变换.

的量级.

习　题

习题　试求在场 $U=-\alpha/r$ 中椭圆运动的作用变量.

解:在平面运动中对于极坐标 r,φ 有

$$I_\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_\varphi \mathrm{d}\varphi = M,$$

$$I_r = \frac{2}{2\pi}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{M^2}{r^2}}\mathrm{d}r = -M + \alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|}}$$

由此得作用变量表示的能量

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2(I_r+I_\varphi)^2}.$$

能量仅依赖于变量之和 I_r+I_φ 表明运动退化,即两个基频(对于 φ 和 r)重合.

轨道参数 p 和 e(参见(15.4))用 I_r,I_φ 表示为

$$p=\frac{I_\varphi^2}{m\alpha},\quad e^2=1-\left(\frac{I_\varphi}{I_\varphi+I_r}\right)^2.$$

由于 I_r 和 I_φ 具有绝热不变性,在系数 α 或者质量 m 缓慢变化时,轨道偏心率保持不变,而轨道的尺度变化反比于 α 和 m.

朗道撰写的第一版序

理论物理学教程.力学

众所周知,物理学由两个学科组成:实验物理和理论物理.我们已知的大量物理定律可以由为数不多的最一般规律推演出来.这样的推演和建立最一般规律都需要各自的方法,因此形成了一个特别的学科——理论物理学.

理论物理利用数学方法获得自己的结果,这些结果与实验结果没有什么差别.当然,最一般规律的建立只能以实验为基础,甚至从一般规律中获取结果也需要对现象的预先实验研究,没有这样的实验研究,就无法判断大量结果中哪些是重要的,哪些是可以忽略的.在得到计算重要结果的方程之后,理论物理的任务其实就完成了.进一步应用这些方程于具体对象属于数学问题,由称为数学物理的一个数学分支来研究.

理论物理的目标是建立物理定律,即建立物理量之间的关系.确定物理量具体数值一般不属于理论物理的任务,实验处理这些问题相对比较容易,在绝大多数情况下没有必要重复类似的计算,这些计算需要花费大量时间和人力.当然,用理论可以直接算出数值的简单情况除外①.

必须指出,由于理论物理的任务是建立刻画给定现象的物理量之间的联系,因此只有在自然界确实存在这种联系时,才能建立理论.但是,经常是我们感兴趣的物理量之间毫无关系,在不同的自然现象中它们有完全不同的关系.因此,缺乏某个现象的理论并不意味着它无法理解.在这种情况下从最一般规律无法推演得出规律性结论,但是在其它情况下却可以得到.

理论物理的重要作用在于近似分析.首先,所有精确的规律都是近似的,尽

① 朗道写这个序言是在1940年,那时的计算手段很落后,所以数值计算比实验还困难.——译者注

管在绝大多数情况下这种近似程度是非常高的，而且也没有对物理规律绝对精确的要求.如果事先确定了某个现象的研究范围，给出的规律满足精度要求就可以了.因此，尽管我们知道它不是绝对精确的，而且我们也知道有更加精确的相对论力学，我们仍然使用牛顿力学来研究运动.

在理论物理中与精确理论并存着一些早被证实不太精确的理论(通常称为经典理论)，这是因为它们对于现象的特定研究范围还有应用价值.任何逻辑上封闭的理论都在一定精度范围内被实验证实，永远不会失去其价值，是更精确理论在特殊情况下成立的近似结果.当然，这不包括那些存在内在矛盾的理论，它们的价值在于记录理论物理发展的一个阶段.

近似在通常的物理理论中有重要的意义，在从一般规律推演具体规律过程中其作用也不小.考虑非重要事实的过于精确的计算不仅会使计算结果毫无价值地复杂化，而且还会导致无法研究得到现象的规律.事实上，近似研究不仅可以显现规律的具体形式，而且还可以发现刻画现象的物理量之间的函数关系，在给定精度之外这些物理量的关系可能是任意的.

确定对研究现象的近似程度在理论研究中是非常重要的.最严重的错误是，采用非常精确的理论并详细计算所有的细节修正，同时却忽略了非常重要的物理量.

л.д.朗道

1940 年

索引[①]

① 这个索引不重复目录,而是其补充.索引中包含在目录中没有反映出来的术语和概念.